

Relativiteit (deel 2)

- § 1 Impuls (klassiek)
- § 2 Elastische en inelastische botsingen (klassiek)
- § 3 Relativistische impuls en energie van materiedeeltjes
- § 4 Rustenergie en massa
- § 5 Diagram met energie tegen impuls keer lichtsnelheid
- § 6 Lorentztransformatie van impuls en energie
- § 7 Fotonen
- § 8 Wisselwerking tussen (sub)atomaire deeltjes; grafische weergave
- § 9 Wisselwerking tussen (sub)atomaire deeltjes; berekeningen
- § 10 Massadefect bij kernreacties
- § 11 Bindingsenergie van atoomkernen

Bijlage: Afleiding van formules met relativistische impuls en energie

§ 1 Impuls (klassiek)

Inleiding

In deze paragraaf kijken we naar voorwerpen die op elkaar botsen en/of uit elkaar bewegen. Daarbij staat de grootheid 'impuls' centraal. In de volgende paragraaf wordt naast de impuls ook naar de 'kinetische energie' van voorwerpen gekeken. In deze paragrafen worden beide begrippen behandeld volgens de klassieke mechanica. In de derde paragraaf gebeurt dit relativistisch.

Impuls van een voorwerp

Onder de 'impuls' p van een voorwerp met massa m en snelheid v verstaan we het product van massa en snelheid. Soms wordt de impuls ook wel de 'hoeveelheid van beweging' genoemd. Zie de onderstaande figuur.



Stel bijvoorbeeld dat een voorwerp een massa van 4,0 kg en een snelheid van 5,0 m/s heeft. Voor de impuls van het voorwerp geldt dan: $p = 4,0 \cdot 5,0 = 20 \text{ kgm/s}$. Als het voorwerp niet in de positieve, maar in de negatieve richting van de plaatsas (x-as) zou bewegen, zijn zowel de snelheid als de impuls negatief. We krijgen dan bijvoorbeeld: $p = 4,0 \cdot -5,0 = -20 \text{ kgm/s}$. De impuls heeft net als de snelheid een grootte en een richting en is dus een vector.

Als er op het voorwerp een constante kracht F over een zekere tijd Δt werkt, noemen we het product van F en Δt de 'stoot' van de kracht. De stoot op het voorwerp is gelijk aan de impulsverandering van het voorwerp. Er geldt dus:

$$F \cdot \Delta t = \Delta(m \cdot v).$$

Deze formule is eenvoudig af te leiden. Omdat de massa m constant is, kunnen we de bovenstaande formule namelijk schrijven als: $F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v$ en dat is de tweede wet van Newton (die meestal geschreven wordt als $F = m \cdot a$).

Wet van behoud van impuls

Als twee of meer voorwerpen krachten op elkaar uitoefenen waarbij er geen krachten van buitenaf op de voorwerpen werken, geldt de wet van behoud van impuls. Deze luidt als volgt. Voor een afgesloten groep voorwerpen (of deeltjes) is de totale impuls constant.

De wet van behoud van impuls is makkelijk te bewijzen. Als twee voorwerpen A en B een kracht op elkaar uitoefenen, is volgens de derde wet van Newton de kracht F_{AB} van A op B even groot als maar tegengesteld gericht aan de kracht F_{BA} van B op A. Kort opgeschreven is dit:

$$F_{AB} = -F_{BA}$$

De stoot op A is dan steeds even groot als maar tegengesteld aan de stoot op B. Dus wat A aan impuls wint (verliest), moet B aan impuls verliezen (winnen).

In de rest van deze paragraaf beperken we ons tot twee voorwerpen. Neem het volgende voorbeeld dat in de onderstaande figuur is getekend. Blok A en blok B bevinden zich op een zeer gladde vloer (wrijvingskrachten zijn dus verwaarloosbaar). Van blok A bedraagt de massa 1 kg en van blok B 2 kg. Blok A botst met een snelheid van 6 m/s naar rechts op blok B, dat tot dan nog in rust is. Na de botsing beweegt blok A met 2 m/s naar links en blok B met 4 m/s naar rechts.



De totale impuls voor de botsing is: $p(\text{totaal,voor}) = 1 \times 6 + 2 \times 0 = 6 \text{ kgm/s}$.
 De totale impuls na de botsing is: $p(\text{totaal,na}) = 1 \times -2 + 2 \times 4 = 6 \text{ kgm/s}$.
 Zoals verwacht, is de totale impuls voor de botsing dus gelijk aan de totale impuls na de botsing.

Voorbeeld van een opgave

Uit een geweer met een massa van 11 kg wordt een kogel van 13 g afgeschoten. De kogel krijgt een snelheid van 1000 m/s. Bereken de snelheid van het geweer direct na het schot.

Oplossing

Vóór het moment van het schot is de impuls van het geweer met kogel nul.

Na het moment van het schot moet de totale impuls dus ook nul zijn.

Voor de impuls van de kogel geldt: $p(\text{kogel,na}) = 0,013 \times 1000 = 13 \text{ kgm/s}$.

De bewegingsrichting van de kogel is hierbij positief genomen.

De impuls van het geweer is dan dus: $p(\text{geweer,na}) = -13 \text{ kgm/s}$.

Voor de snelheid van het geweer geldt dan:

$$v(\text{geweer,na}) = p(\text{geweer,na}) / m(\text{geweer}) = -13 / 11 = -1,2 \text{ m/s}.$$

Deze snelheid is negatief en is dus tegengesteld aan de richting, waarin de kogel beweegt. Dat betekent dat het geweer met een snelheid van 1,2 m/s tegen het lichaam van de schutter drukt. Dit staat bekend als de terugslag van een vuurwapen.

Opgaven bij § 1

Opgave 1

Een kanon heeft een massa van 1200 kg en schiet een kogel met een massa van 15 kg in horizontale richting weg met een snelheid van 60 m/s. Bereken de snelheid van het kanon in achterwaartse richting direct na het afvuren van de kogel.

Opgave 2

Een boogschutter schiet met een pijl van 50 g op een appel van 200 g die op een paal gelegd is. Voordat de pijl de appel binnen dringt, heeft deze een snelheid van 20 m/s. De pijl blijft in de appel steken en samen vliegen ze verder.

Bereken de snelheid van de appel (met de pijl) nadat deze door de pijl getroffen is.

Opgave 3

Een kogel A (massa = 3,0 kg) heeft een snelheid van 8,0 m/s naar rechts. A botst centraal tegen een kogel B (massa = 2,0 kg) die een snelheid van 7,0 m/s naar links heeft. Na de botsing beweegt kogel B met een snelheid van 6,0 m/s naar rechts. Bereken de snelheid van kogel A na de botsing. Neem bij de berekeningen naar rechts positief.

Opgave 4

In deze opgave gebruiken we de 'atomaire massa-eenheid' met symbool u . Een proton met een massa van $1,0 u$ (afgerond op één decimaal) botst centraal met een snelheid van $1,0 \cdot 10^7$ m/s tegen een stilstaande heliumkern. Het proton kaatst terug met een snelheid van $0,6 \cdot 10^7$ m/s. De heliumkern krijgt een snelheid van $0,4 \cdot 10^7$ m/s.

Bereken de massa van de heliumkern. De impuls van de deeltjes kan hierbij het beste in de eenheid ' $u \cdot m/s$ ' worden uitgedrukt.

Opgave 5

Een raket in de ruimte kan zijn snelheid vergroten door aan de achterkant verbrandingsgassen uit te stoten en deze gassen een hoge snelheid mee te geven. Het massamiddelpunt van het geheel (raket met brandstof plus het uitgestoten gas) verandert daarbij niet van snelheid.

Stel dat een raket met een massa van 500 kg (inclusief brandstof) in een milliseconde (ms) een hoeveelheid gas met een massa van $0,015$ kg uitstoot. Stel verder dat dit gas een snelheid heeft van 100 m/s ten opzichte van het massamiddelpunt van het geheel.

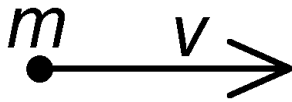
Bereken dan de versnelling van de raket. Neem daarbij aan dat de massa van de raket na de uitstoot nog steeds (afgerond) 500 kg is.

Tip: verplaats jezelf in het massamiddelpunt van het geheel.

§ 2 Elastische en inelastische botsingen (klassiek)

Kinetische energie

Voor de 'kinetische energie' E_K van een voorwerp met massa m en snelheid v geldt:



$$E_K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Stel weer dat een voorwerp een massa van 4,0 kg en een snelheid van 5,0 m/s heeft. Voor de kinetische energie van het voorwerp geldt dan:

$E_K = \frac{1}{2} \cdot 4,0 \cdot 5,0^2 = 50 \text{ J}$. Ongeacht de richting van de snelheid kan de kinetische energie nooit een negatieve waarde krijgen.

Als er op het voorwerp een constante kracht F over een zekere afstand s werkt, noemen we het product van F en s de 'arbeid' van de kracht (F moet dan wel in de bewegingsrichting werken). Als het voorwerp in het begin in rust is (en zijn kinetische energie dan nul is), is de eindwaarde van de kinetische energie even groot als deze arbeid. Er geldt dan dus: $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = F \cdot s$

Elastische en inelastische botsingen

We beperken ons in de volgende bespreking tot centrale botsingen van twee voorwerpen. Dat zijn botsingen waarbij alle snelheden langs één en dezelfde lijn gericht zijn. Zie bijvoorbeeld het onderstaande voorbeeld met de blokken A en B. We kunnen bij zo'n centrale botsing in het algemeen twee fasen van het botsingsproces onderscheiden. In de eerste fase neemt de snelheid van de twee voorwerpen ten opzichte van elkaar af. Hierbij wordt kinetische energie (ten dele) omgezet in elastische (veer)energie. De eerste fase eindigt als beide voorwerpen dezelfde snelheid hebben gekregen; hun vormverandering is dan maximaal. In de tweede fase proberen de onderlinge krachten de vormverandering weer ongedaan te maken. Hierbij wordt de elastische energie (veerenergie) weer omgezet in kinetische energie. De tweede fase eindigt (en daarmee ook het botsingsproces) zodra de voorwerpen geen krachten meer op elkaar uitoefenen.

We kunnen bij botsingen twee gevallen onderscheiden namelijk:

- 1) Elastische botsingen;
- 2) Inelastische botsingen.

Bij inelastische botsingen hebben we nog het grensgeval van de volkomen inelastische botsing.

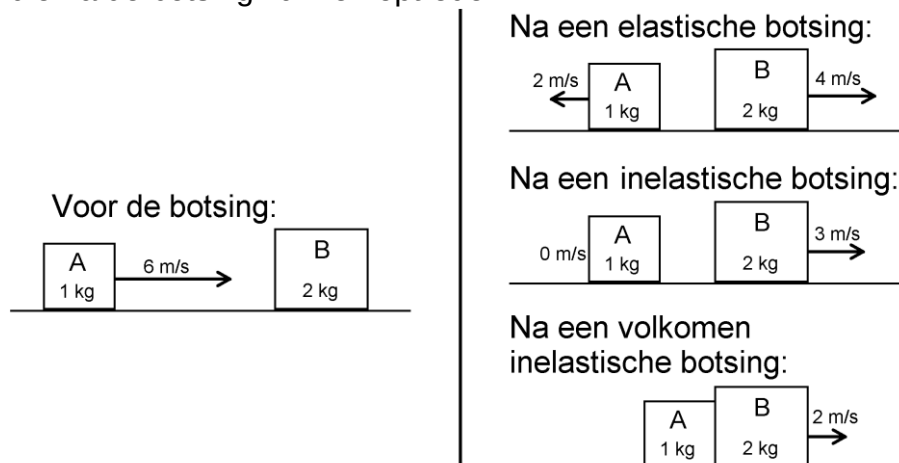
Bij elastische botsingen worden gedurende de tweede fase van het botsingsproces de vormveranderingen van de beide voorwerpen geheel ongedaan gemaakt. Het gevolg is dat de totale kinetische energie na de botsing even groot is als de totale kinetische energie voor de botsing.

Bij inelastische botsingen bewegen de voorwerpen na de botsing in het algemeen wel uit elkaar maar is het vormherstel niet perfect en gaat dus een deel van kinetische energie verloren.

Bij volkomen inelastische botsingen (ook wel plastische botsingen genoemd) ontbreekt de tweede fase van het botsingsproces geheel. Beide voorwerpen gaan dan als één geheel verder. Er gaat een maximum aan kinetische energie verloren.

Getallenvoorbeeld

Neem het volgende voorbeeld dat een uitbreiding is van het voorbeeld uit de vorige paragraaf. Zie ook de onderstaande figuur. In de figuur zijn drie situaties getekend die na de botsing kunnen optreden.



In alle gevallen wordt aan de wet van behoud van impuls voldaan. Zie hieronder.

Voor de botsing geldt:	$p(\text{totaal, voor}) = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 0 = 6 \text{ kgm/s.}$
Na de elastische botsing geldt:	$p(\text{totaal, na}) = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 = 6 \text{ kgm/s.}$
Na de inelastische botsing geldt:	$p(\text{totaal, na}) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 = 6 \text{ kgm/s.}$
Na de volkomen inelastische botsing geldt:	$p(\text{totaal, na}) = (1+2) \cdot 2 = 6 \text{ kgm/s.}$

Nu kijken we naar de kinetische energieën.

Voor de botsing geldt: $E_K(\text{totaal, voor}) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6^2 = 18 \text{ J.}$

Na de elastische botsing geldt: $E_K(\text{totaal, na}) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4^2 = 18 \text{ J.}$

Na de inelastische botsing geldt: $E_K(\text{totaal, na}) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3^2 = 9 \text{ J.}$

Na de volkomen inel. botsing geldt: $E_K(\text{totaal, na}) = \frac{1}{2} \cdot (1+2) \cdot 2^2 = 6 \text{ J.}$

Bij de elastische botsing gaat er geen kinetische energie verloren, want zowel voor als na de botsing bedraagt deze 18 J.

Bij de inelastische botsing wordt er $18 \text{ J} - 9 \text{ J} = 9 \text{ J}$ aan kinetische energie omgezet in warmte en veerenergie.

Bij de volkomen inelastische botsing gaat er een maximum aan kinetische energie verloren. In ons voorbeeld is dit $18 \text{ J} - 6 \text{ J} = 12 \text{ J}$.

Bij elastische botsingen ondergaan de voorwerpen in de tweede fase van het botsingsproces dezelfde snelheidsverandering als in de eerste fase. Met deze regel vinden we de snelheid van beide voorwerpen na zo'n elastische botsing. We gebruiken hierbij de volledig inelastische botsing als einde van de eerste fase. Neem bijvoorbeeld blok A in ons voorbeeld. Vóór de botsing was zijn snelheid 6 m/s en na de eerste fase 2 m/s. De snelheid van blok A is dus met 4 m/s afgenomen. In de tweede fase neemt de snelheid van A dus weer met 4 m/s af. De eindsnelheid van A is bij een elastische botsing dus $2 - 4 = -2 \text{ m/s}$. Voor blok B gaat dit analoog. In de eerste fase van de botsing neemt zijn snelheid toe met 2 m/s. Na de tweede fase van de botsing is zijn snelheid dus 4 m/s.

Voorbeeld van een opgave

In de figuur hiernaast beweegt een neonatoom (massa 20,0 u) met 500 m/s naar rechts en een argonatoom (massa 40,0 u) met 175 m/s naar links.



Beide atomen botsen centraal en elastisch op elkaar. Bereken de snelheid (in m/s) van het neonatoom na de botsing.

Oplossing

Voor de impuls voor de botsing geldt:

$$p(\text{voor}) = m(\text{Ne}) \cdot v(\text{Ne}) + m(\text{Ar}) \cdot v(\text{Ar}) = 20,0 \cdot 500 - 40,0 \cdot 175 = 3000 \text{ um/s}$$

Als de botsing volkomen inelastisch zou zijn, zou voor de snelheid gelden:

$$v(\text{na, volkomen inelastisch}) = \frac{p(\text{voor})}{m(\text{Ne}) + m(\text{Ar})} = \frac{3000 \text{ um/s}}{(20,0 + 40,0) \text{ u}} = 50 \text{ m/s}$$

De botsing is echter elastisch. Voor de snelheidsverandering van het neonatoom tijdens de eerste fase van de botsing geldt:

$$\Delta v = 50 - 500 = -450 \text{ m/s}$$

Voor de snelheid van het neonatoom na de botsing geldt dan:

$$v(\text{na, elastisch}) = 50 - 450 = -400 \text{ m/s}$$

Na de botsing beweegt het neonatoom dus met 400 m/s naar links.

.

Opgaven bij § 2

Opgave 1

Geef aan of de volgende beweringen waar of niet waar zijn.

- a) De impuls van een bewegend deeltje heeft een richting.
- b) De kinetische energie van een bewegend deeltje heeft een richting.
- c) Als de snelheid van een deeltje verdubbelt, verdubbelt ook zijn impuls.
- d) Als de snelheid van een deeltje verdubbelt, verdubbelt ook zijn kinetische energie.
- e) Bij botsingen van voorwerpen geldt altijd de wet van behoud van impuls.
- f) Bij botsingen van voorwerpen geldt altijd de wet van behoud van kinetische energie.
- g) De kinetische energie gedeeld door de impuls van een bewegend voorwerp is evenredig met zijn massa.
- h) De kinetische energie gedeeld door de impuls van een bewegend voorwerp is evenredig met zijn snelheid.

Opgave 2

Een boogschutter schiet met een pijl van 50 g op een appel van 200 g die op een paal gelegd is. Voordat de pijl de appel binnen dringt, heeft deze een snelheid van 20 m/s. De pijl blijft in de appel steken en samen vliegen ze verder.

- a. Bereken de snelheid van de appel (en de pijl) nadat deze door de pijl getroffen is.
- b. Bereken hoeveel kinetische energie verloren gaat als de pijl zich in de appel dringt.

Opgave 3

Een kogel A (massa = 3,0 kg) heeft een snelheid van 8,0 m/s naar rechts. A botst centraal tegen een kogel B (massa = 2,0 kg) die een snelheid van 7,0 m/s naar links heeft. Neem bij de berekeningen een beweging naar rechts positief.

a.

Toon aan dat de snelheid na een volkomen inelastische botsing (dus als beide kogels als één geheel verder zouden gaan) 2,0 m/s zou zijn.

b.

Bereken hoeveel kinetische energie er bij deze botsing verloren is gegaan.

c.

Bereken de snelheid van de kogels A en B na de botsing als deze elastisch zou zijn.

Opgave 4

Een neutron (massa 1,0 u) botst tegen een stilstaande heliumkern (massa 4,0 u) op. De botsing is centraal en elastisch. Voor de botsing is de snelheid van het neutron 10,0 km/s. Bereken de snelheid van het neutron na de botsing.

Opgave 5

In de figuur hiernaast explodeert een stilstaand voorwerp. Hierbij ontstaan er twee ongelijke delen die uit elkaar vliegen. Neem aan dat het zwaarste deel een n keer zo grote massa heeft als het

lichtste deel. In de figuur is m_2 dus n keer zo groot als m_1 . Deze situatie komt bijvoorbeeld voor bij alfaverval van een instabiele atoomkern. Het alfadeeltje is dan veel en veel lichter dan de overgebleven atoomkern.

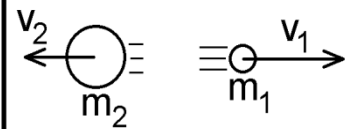
a.

Toon aan dat de snelheid v_1 van het lichtste deel n keer zo groot is als de snelheid v_2 van het zwaarste deel (laat het teken van de snelheden buiten beschouwing).

Voor de explosie:



Na de explosie:



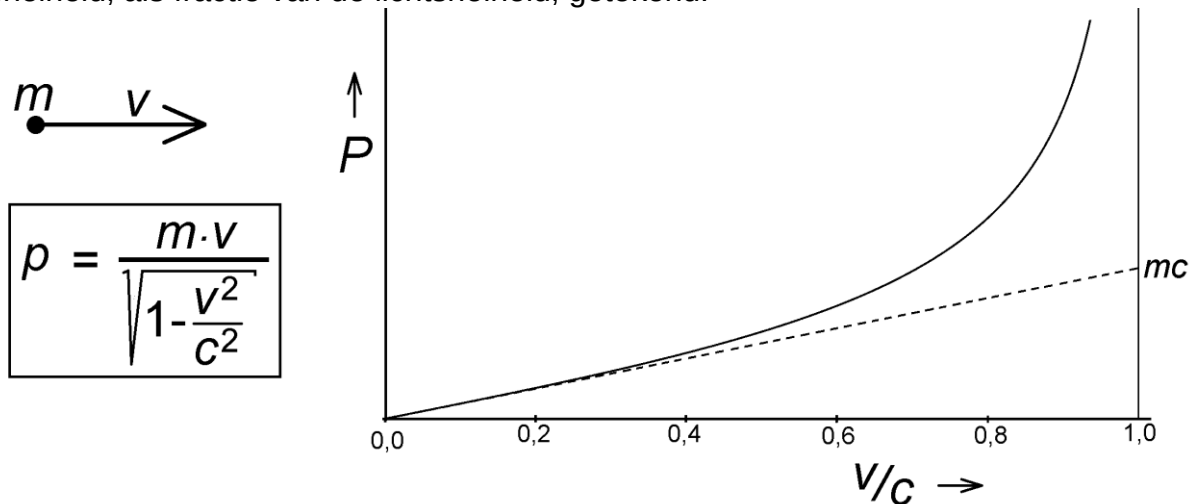
b.

Toon aan dat de kinetische energie $E_{k,1}$ van het lichtste deel n keer zo groot is als de kinetische energie $E_{k,2}$ van het zwaarste deel.

§ 3 Relativistische impuls en energie van materiedeeltjes

Relativistische impuls

Ook in de relativistische mechanica kan aan een voorwerp (of deeltje) met massa m en snelheid v een impuls p worden toegekend. Zoals in de bijlage wordt bewezen, geldt hiervoor de onderstaande omkaderde formule. De letter c stelt, zoals altijd, de lichtsnelheid voor. Rechts van de formule is het verband tussen de impuls en de snelheid, als fractie van de lichtsnelheid, getekend.



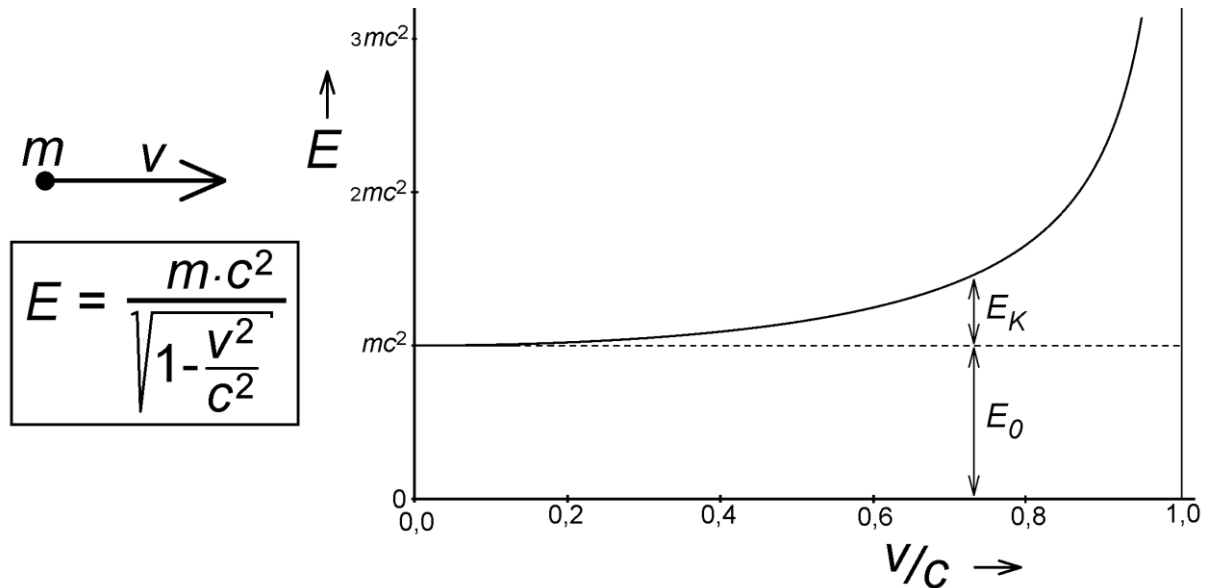
Voor kleine snelheden (v veel kleiner dan c) gaat de relativistische impuls over in de klassieke impuls $p = m \cdot v$. De noemer van de breuk in de formule wordt dan namelijk (bij benadering) 1. Dat de relativistische formule voor de impuls bij kleine snelheden overgaat in de klassieke formule voor de impuls is natuurlijk een belangrijke eis.

De stippellijn in het diagram geeft het verband tussen de klassieke impuls en de snelheid (als fractie van de lichtsnelheid) weer. Bij de lichtsnelheid (dus als $v = c$) bedraagt de klassieke impuls natuurlijk mc . De relativistische impuls gaat bij toenemende snelheid echter steeds meer afwijken van de klassieke impuls, omdat de noemer van de breuk in de formule dan steeds kleiner wordt. Bij de lichtsnelheid wordt de noemer nul en de relativistische impuls oneindig groot. Daarom kan een materieel voorwerp de lichtsnelheid hooguit benaderen maar nooit bereiken.

Een foton reist met de lichtsnelheid en bezit geen massa. We kunnen dan de bovenstaande formule voor de relativistische impuls niet gebruiken, want de teller en de noemer van de breuk zijn dan allebei gelijk aan nul en een dergelijke uitdrukking is wiskundig niet gedefinieerd.

Relativistische energie

In de relativistische mechanica heeft een voorwerp (of deeltje) met massa m en snelheid v een totale energie E waarvoor de onderstaande omkaderde formule geldt. Zie de bijlage voor het bewijs. Rechts van de formule is het verband tussen de energie en de snelheid, als fractie van de lichtsnelheid, getekend. Net als hierboven blijkt hieruit dat het voorwerp nooit met de lichtsnelheid kan bewegen omdat zijn energie dan oneindig groot zou zijn. Om dezelfde reden als bij de relativistische impuls kunnen we de omkaderde formule niet gebruiken voor fotonen omdat de teller en de noemer dan allebei nul zijn en $0/0$ niet gedefinieerd is.



Anders dan bij de relativistische impuls kunnen we deze formule niet zomaar vergelijken met de klassieke formule voor de kinetische energie van een materieel deeltje. Weliswaar neemt E toe als v groter wordt, maar E is niet gelijk aan nul als $v = 0$. Zelfs als het voorwerp helemaal stil staat, heeft het nog steeds energie. Die rustenergie moeten we dus duidelijk scheiden van de kinetische energie.

We zien het daarom als volgt. De energie E is opgebouwd uit twee bijdragen namelijk de zogenoemde rustenergie E_0 en de kinetische energie E_K . Zie ook het bovenstaande diagram. De rustenergie is onafhankelijk van de snelheid en hiervoor geldt (substitueer $v = 0$):

$$E_0 = m \cdot c^2.$$

De kinetische energie is snelheidsafhankelijk en is nul als het voorwerp in rust is.

We kunnen het rechter lid van de formule schrijven als de volgende, oneindig lange, reeks:

$$E = \underbrace{m \cdot c^2}_{\text{rustenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{3}{8} \cdot m \cdot \frac{v^4}{c^2} + \frac{15}{48} \cdot m \cdot \frac{v^6}{c^4} + \dots}_{\text{kinetische energie}}$$

De eerste term van het rechter lid is de rustenergie van het deeltje. Alle volgende termen vormen samen de kinetische energie (bewegingsenergie) van het deeltje. De tweede term ($\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$) is groter dan de derde term; de derde term is weer groter dan de vierde term enzovoort. Als de snelheid klein is ten opzichte van de lichtsnelheid is de tweede term een goede benadering voor de kinetische energie. Dan geldt er dus:

$$E \approx \underbrace{m \cdot c^2}_{\text{rustenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}_{\text{kinetische energie}}$$

Ook in de klassieke natuurkunde stelt $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ de kinetische energie van een deeltje voor.

Wiskundige toelichting op de bovenstaande reeksontwikkeling

Uit de wiskunde volgt:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \beta^2 + \frac{3}{8} \cdot \beta^4 + \frac{15}{48} \cdot \beta^6 + \dots$$

Als we deze reeksontwikkeling toepassen op de formule voor E waarbij we β gelijk stellen aan v/c , krijgen we:

$$E = m \cdot c^2 \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{v^4}{c^4} + \frac{15}{48} \cdot \frac{v^6}{c^6} + \dots \right]$$

Deze vergelijking kan geschreven worden als die hiervoor gegeven was.

Opmerking over massa

Om spraakverwarring te voorkomen, spreken we af dat de massa m (net als de elektrische lading q) van een voorwerp of deeltje voor iedere waarnemer gelijk is en dus onafhankelijk van zijn snelheid v is. De massa kan door een waarnemer, voor wie het deeltje in rust is, worden bepaald door het deeltje bij wijze van spreken op een weegschaal te leggen. Tot het einde van de twintigste eeuw werd onderscheid gemaakt tussen rustmassa en relativistische massa. Tegenwoordig wordt dat onderscheid niet meer gemaakt en wij verstaan onder de massa dus altijd de rustmassa.

Opgaven bij § 3

Opgave 1

Een deeltje met massa m beweegt met snelheid v . Leg met behulp van de in de leestekst gegeven formules uit dat de impuls p en de totale energie E oneindig groot zouden worden als v gelijk is aan de lichtsnelheid c .

Opgave 2

Een deeltje heeft totale energie E en rustenergie E_0 en kinetische energie E_k . Geef het verband tussen deze drie grootheden. Maak hierbij geen gebruik van andere grootheden.

Opgave 3

Een deeltje heeft massa m en snelheid v . De letter c is de lichtsnelheid. Gebruik deze grootheden in de volgende opdrachten.

- Geef de formule voor de rustenergie E_0
- Geef de formule voor de totale energie E . Geen oneindig lange reeks nemen!
- Geef de formule voor de kinetische energie E_k . Geen oneindig lange reeks nemen!

Opgave 4

Een deeltje met massa m beweegt met 70% van de lichtsnelheid.

- Toon aan dat voor de impuls van het deeltje geldt: $p = 0,98 \cdot mc$.
- Toon aan dat voor de totale energie geldt: $E = 1,4 \cdot mc^2$.
- Leg uit dat de kinetische energie van het deeltje gelijk is aan $E_k = 0,4 \cdot mc^2$.

Opgave 5

Een deeltje met massa m beweegt met 60% van de lichtsnelheid.

a.

Toon met een berekening aan dat de (totale) energie van het deeltje 1,25 keer groter is dan zijn rustenergie.

b.

Leg uit dat hieruit volgt dat de rustenergie van het deeltje 4 keer groter is dan zijn kinetische energie.

Opgave 6

Bereken bij welke snelheid van het deeltje de kinetische energie even groot is als de rustenergie.

Opgave 7

Hieronder staan de exacte en de benaderende uitdrukkingen voor de energie van een voorwerp met massa m en snelheid v .

Exacte uitdrukking voor de energie:

$$E = \underbrace{m \cdot c^2}_{\text{rustenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{3}{8} \cdot m \cdot \frac{v^4}{c^2} + \frac{15}{48} \cdot m \cdot \frac{v^6}{c^4} + \dots}_{\text{kinetische energie}} = m \cdot c^2 \cdot \overbrace{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}^A$$

Benadering voor de energie:

$$E \approx \underbrace{m \cdot c^2}_{\text{rustenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}_{\text{kinetische energie}} = m \cdot c^2 \cdot \overbrace{\left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)}^B$$

In deze opgave gaan we na in hoeverre de benadering, dus het weglaten van de hogere orde termen van de kinetische energie, geoorloofd is. De relatieve fout die daarbij gemaakt wordt is $(A-B)/A$. Hierbij zijn A en B hierboven aangegeven (A wordt de lorentzfactor genoemd en ook wel met de letter gamma aangegeven).

Bereken de relatieve fout bij drie snelheden, namelijk bij 30%, 50% en 70% van de lichtsnelheid.

§ 4 Rustenergie en massa

Rustenergie en massa

Het verband tussen de rustenergie E_0 van een deeltje (of voorwerp) met massa m is:

$$E_0 = m \cdot c^2$$

Dit houdt in dat er in een voorwerp met massa (zeer veel) rustenergie schuil gaat. Je zou massa kunnen omschrijven als 'ingepakte' of 'ingevroren' energie. Dat een bepaalde massa gepaard gaat met zeer veel rustenergie komt doordat in de bovenstaande formule de massa vermenigvuldigd wordt met het kwadraat van de lichtsnelheid.

Stelsel van deeltjes

Vaak bestaat een deeltje uit meerdere bestanddelen. Bijvoorbeeld bestaat een macroscopisch voorwerp, zoals een steen, uit miljarden moleculen. Moleculen zijn weer opgebouwd uit atomen. Atomen bestaan uit een atoomkern en uit één of meerdere elektronen. De atoomkern bestaat weer uit protonen en neutronen. Zelfs protonen en neutronen zijn weer opgebouwd uit nog kleinere deeltjes. Als een voorwerp is opgebouwd uit meerdere bestanddelen, spreken we over een "stelsel van deeltjes" of een "systeem van deeltjes". Elementaire deeltjes, zoals elektronen, zijn geen stelsel van deeltjes.

De massa van een stelsel van deeltjes

Relativistisch gezien is de massa van een stelsel van deeltjes in het algemeen NIET gelijk aan de optelsom van de massa's van de afzonderlijke bestanddelen. Neem de volgende voorbeelden.

1)

De massa van een atoom is kleiner dan de optelsom van de massa's van de losse elektronen en van de atoomkern. Hiervoor is de (elektrische) aantrekkingskracht tussen de atoomkern en de elektronen verantwoordelijk. Men spreekt in zo'n geval van de bindingsenergie.

2)

De massa van de atoomkern is kleiner dan de optelsom van de massa's van de losse protonen en neutronen. In dit geval is de kernkracht verantwoordelijk voor de bindingsenergie.

3)

De massa van een hoeveelheid ideaal gas (dat is een gas, waarbij de moleculen oneindig klein zijn en elkaar niet aantrekken) is groter dan de optelsom van de massa's van de afzonderlijke moleculen. Hiervoor is de kinetische energie van de moleculen verantwoordelijk.

We zien dus dat de massa van het stelsel zowel groter als kleiner kan zijn dan de optelsom van de afzonderlijke massa's.

Energie toevoeren of onttrekken aan een stelsel van deeltjes

Als je energie toevoert aan een stelsel van deeltjes, stijgt zijn rustenergie en daarmee zijn massa volgens $E_0 = mc^2$. Omgekeerd daalt de rustenergie en daarmee zijn massa, als je energie onttrekt aan een stelsel van deeltjes. Neem de volgende voorbeelden.

1)

Als een atoom een foton (= lichtdeeltje) absorbeert en een elektron daardoor in een hogere baan komt, stijgt de rustenergie en dus ook de massa van het atoom.

2)

Als je een ideaal gas afkoelt, onttrek je energie aan het stelsel. De gemiddelde kinetische energie van de moleculen neemt af en daarmee ook de massa van het gas.

Door het feit dat het kwadraat van de lichtsnelheid zo groot is, zijn de massa-afnames in de bovenstaande voorbeelden niet of nauwelijks merkbaar. Dit blijkt ook uit de onderstaande getallenvoorbeelden.

Tijdens de explosie van een bom wordt er in korte tijd veel energie aan de omgeving afgegeven. Dit betekent dat de massa van de materie, waar de bom van gemaakt is, iets afneemt. Dit geldt voor zowel een chemische bom als een kernbom. Stel bijvoorbeeld dat er in een chemische bom koolstof wordt verbrand. Dan is het inderdaad zo dat de massa van een CO₂-molecuul een heel klein beetje lager ligt dan de massa van een C-atoom plus de massa van een O₂-molecuul. Bij kernbommen geldt iets soortgelijks; alleen is de procentuele massa-afname daar veel groter.

Getallenvoorbeelden

Voorbeeld 1

Een groot bekerglas is gevuld met 1,00 kg water van 100 °C. Als het water wordt afgekoeld tot 0 °C, komt hier 0,418 MJ aan warmte bij vrij. De rustenergie van het water neemt dan af met 0,418 MJ. De massa van het water neemt dan af met:

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2} = \frac{0,418 \cdot 10^6}{(3,0 \cdot 10^8)^2} = 4,6 \cdot 10^{-12} \text{ kg}.$$

Voorbeeld 2

Een spiraalveer met een veerconstante van 100 N/m is 0,10 m ingedrukt. Als hij naar de ongespannen toestand teruggaat, neemt de veerenergie af met 0,50 J. De massa van de veer neemt dan af met:

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2} = \frac{0,50}{(3,0 \cdot 10^8)^2} = 5,6 \cdot 10^{-18} \text{ kg}.$$

Opgaven bij § 4

Opgave 1

Geef van de volgende situaties aan of de massa van het (eerstgenoemde) voorwerp toe- of afneemt.

- a.
Een steen neemt warmte op van zijn omgeving.
- b.
Een ingedrukte spiraalveer schiet een kogel weg.
- c.
Een accu laat een lamp branden
- d.
Een aangeslagen atoom zendt een foton uit.

Opgave 2

Je verwarmt een groot blok ijzer. Bereken hoeveel warmte je aan het blok moet toevoeren om de massatoename van het blok een nanogram te laten zijn (nano = een miljardste).

Opgave 3

In de zon vindt kernfusie plaats en de zon is daardoor in staat om gedurende lange tijd zeer veel straling uit te zenden. Per seconde straalt de zon $3,85 \cdot 10^{26}$ J aan energie uit.

Bereken de massa-afname van de zon per seconde.

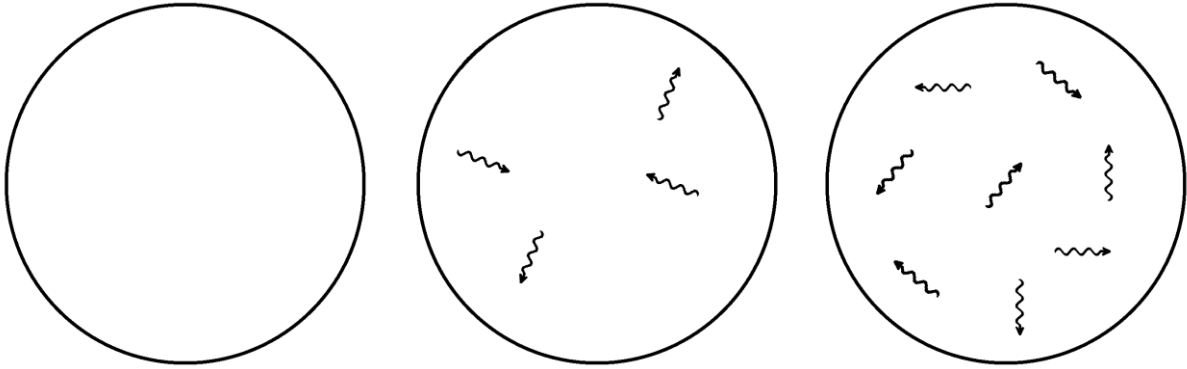
Opgave 4

Een atoom met een massa van 40 u absorbeert een foton met een energie van 2,0 eV. Bereken de procentuele massatoename van het atoom.

Ter info: $1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ en $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Opgave 5

In de onderstaande figuren is drie keer dezelfde bol afgebeeld die aan de binnenkant perfect spiegelen is. In de linker figuur is de bol geheel leeg van binnen. In de middelste figuur zijn vier fotonen in de bol gebracht en in de rechter figuur zijn er nogmaals vier fotonen in de bol gebracht (acht in totaal).



Welke van de volgende beweringen is of zijn juist.

Bewering 1

Elk afzonderlijk foton heeft geen massa.

Bewering 2

Elk afzonderlijk foton heeft geen energie.

Bewering 3

De massa van de drie bollen (inclusief inhoud) is gelijk.

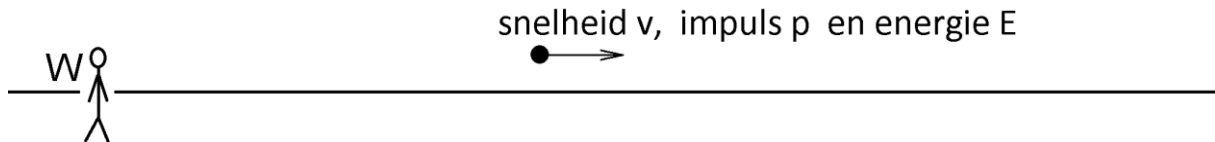
Bewering 4

De massa van de rechter bol (inclusief inhoud) is het grootst.

§ 5 Diagram met energie tegen impuls keer lichtsnelheid

Introductie van de grootte pc

In de onderstaande figuur beweegt een voorwerp met massa m naar rechts met snelheid v , impuls p en totale energie E .



We stappen nu over van de grootte impuls naar de grootte 'impuls keer de lichtsnelheid'. We gebruiken dus pc in plaats van p . Het voordeel hiervan is dat pc een energetische grootte is en we hem daardoor gemakkelijk kunnen vergelijken met E . Merk op dat E altijd een positieve waarde heeft terwijl v en pc in het algemeen ook nul of negatief kunnen zijn (afhankelijk van de richting van de beweging).

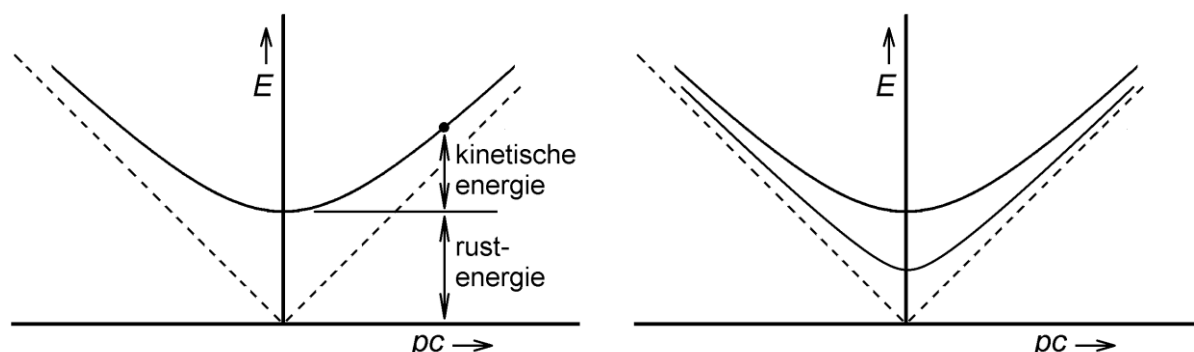
Het is eenvoudig te begrijpen dat de energie van het voorwerp altijd groter moet zijn dan de absolute waarde van de impuls keer de lichtsnelheid. In symbolen: $E > |pc|$. Dit volgt direct uit de onderstaande formules voor E en pc .

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{en} \quad pc = \frac{mvc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Aangezien c altijd groter is dan $|v|$, is E ook altijd groter dan $|pc|$.

E- pc -diagram

De energie en impuls van een voorwerp (of deeltje) kunnen in een diagram tegen elkaar worden uitgezet. Zie de onderstaande linker figuur. Langs de verticale as staat de totale energie E uitgezet en langs de horizontale as het product pc van de impuls en de lichtsnelheid. Van beide grootheden is de eenheid gelijk, zoals bijvoorbeeld joule. De verticale en horizontale as hebben dezelfde schaalverdeling; de ene schaal is dus niet uitgerekt ten opzichte van de andere schaal.



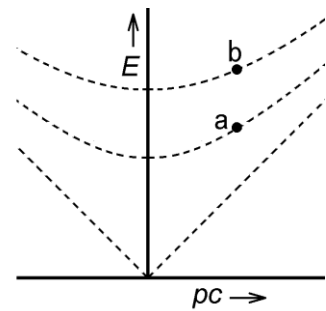
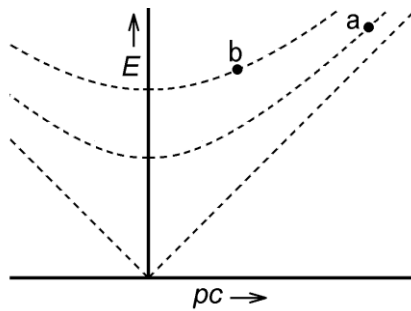
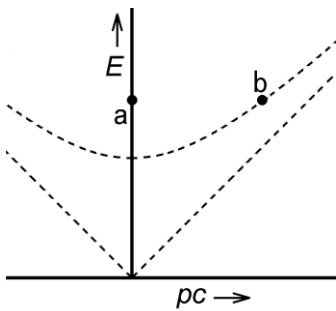
De grafiek is een zogenoemde orthogonale hyperbool met de twee stippellijnen als asymptoten. Deze stippellijnen maken een hoek van 45° met de horizontale en verticale as. Als het deeltje geen impuls heeft, bestaat de energie van het deeltje uitsluitend uit rustenergie mc^2 . Als het deeltje wel impuls heeft, heeft het deeltje behalve rustenergie ook kinetische energie. Hoe groter de impuls is, des te groter ook de kinetische energie is. Voor zeer hoge waarden van de impuls naderen E en pc elkaar. In het diagram nadert de grafiek dan de stippellijn.

In het rechter diagram zijn twee grafieken getekend. Elke grafiek hoort bij een bepaalde massa. Naarmate de massa van het voorwerp kleiner wordt, komt de grafiek lager te liggen. In het extreme geval van massaloze deeltjes (fotonen dus), valt de grafiek samen met de stippellijnen.

Opgaven bij § 5

Opgave 1

In elk van de onderstaande E-pc-diagrammen stellen de punten a en b deeltjes voor met een bepaalde massa, energie en impuls. De kromme gestippelde lijnen zijn orthogonale hyperbolen. Beantwoord bij elk diagram de volgende vragen: 1) Welk deeltje (a of b) heeft de grootste massa? 2) Welk deeltje heeft de grootste snelheid?



Opgave 2

Een waarnemer bestudeert een deeltje. Bij welke snelheid v van het deeltje is de totale energie drie maal zo groot als de impuls maal de lichtsnelheid?

Tip: vergelijk de volgende twee vergelijkingen met elkaar.

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{en} \quad pc = \frac{mvc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Opgave 3

In de onderstaande linker figuur zendt een in rust verkerend atoom a een foton f uit dat naar links beweegt. Het overgebleven atoom b beweegt naar rechts en heeft minder massa dan het oorspronkelijke atoom a.

In de onderstaande rechter figuur zijn drie stippen getekend. Zet bij elke stip de bijbehorende letter a, b of f.

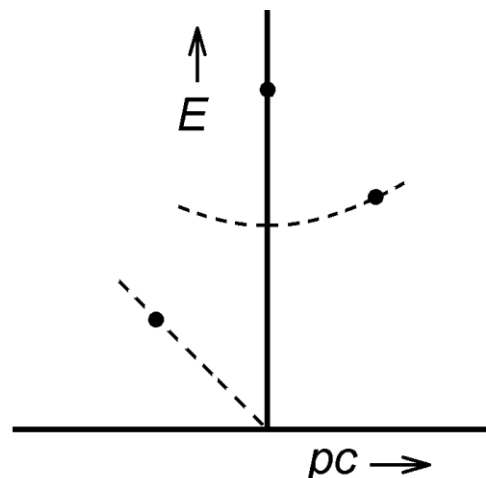
Voor:

(a)

Na:

f

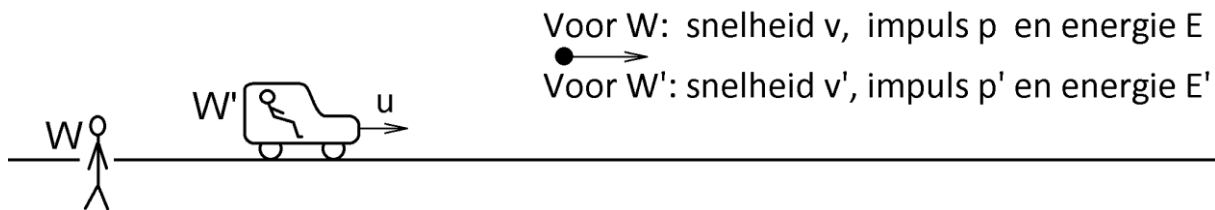
(b) →



§ 6 Lorentztransformatie van impuls en energie

Lorentztransformatie van impuls en energie

In de onderstaande figuur staat waarnemer W op de grond en beweegt waarnemer W' met hoge snelheid u ten opzichte van waarnemer W naar rechts. Beide waarnemers kijken naar een naar rechts bewegend voorwerp (zie de zwarte stip) met massa m . Voor waarnemer W heeft het voorwerp snelheid v , impuls p en (totale) energie E . Voor waarnemer W' heeft het voorwerp snelheid v' , impuls p' en (totale) energie E' . De massa is gelijk voor alle waarnemers.



In de bijlage wordt bewezen dat met de lorentztransformatie de waarden van $p'c$ en E' uit de waarden van pc en E berekend kunnen worden en omgekeerd de waarden van pc en E uit de waarden van $p'c$ en E' berekend kunnen worden. Zie het onderstaande kader.

Lorentz- transformatie van W naar W': $\begin{cases} p'c = \gamma \cdot (pc - \beta \cdot E) \\ E' = \gamma \cdot (E - \beta \cdot pc) \end{cases}$	Lorentz- transformatie van W' naar W: $\begin{cases} pc = \gamma \cdot (p'c + \beta \cdot E') \\ E = \gamma \cdot (E' + \beta \cdot p'c) \end{cases}$
---	---

Hierbij geldt $\beta = \frac{u}{c}$ en $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ waarbij u de snelheid is van W' ten opzichte van W.

Opmerking

Eerder hadden we gezien dat met de lorentztransformatie de plaats- en tijdcoördinaten van een gebeurtenis omgerekend kunnen worden van de ene naar de andere waarnemer. Deze coördinaten waren x en ct voor waarnemer W (en x' en ct' voor waarnemer W'). Nu is pc in de plaats gekomen van x en E in de plaats gekomen van ct .

Rekenvoorbeeld

Een ruimteschip (waarnemer W') passeert de aarde (waarnemer W) met 60% van de lichtsnelheid. Een ruimtesteenkje bevindt zich voor het ruimteschip. Vanuit de aarde bekeken bewegen het ruimteschip en het steentje in dezelfde richting, waarbij het steentje een grotere snelheid heeft dan het ruimteschip.

Voor de aarde (W) gelden voor het steentje: $pc = 12 \text{ J}$ en $E = 15 \text{ J}$.

Hoe groot zijn $p'c$ en E' van het steentje voor het ruimteschip (W')?

Om de lorentztransformatie te kunnen toepassen, moeten we eerst de waarden van bèta en gamma berekenen. Zie de onderstaande berekeningen.

$$\beta = \frac{u}{c} = 0,60 \quad \text{en} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0,60^2}} = 1,25$$

Nu kunnen we met de lorentztransformatie van W naar W' de waarden van $p'c$ en E' bepalen. Zie de onderstaande berekeningen.

$$p'c = \gamma \cdot (pc - \beta \cdot E) = 1,25 \cdot (12 - 0,60 \cdot 15) = 3,75 \text{ J}$$

$$E' = \gamma \cdot (E - \beta \cdot pc) = 1,25 \cdot (15 - 0,60 \cdot 12) = 9,75 \text{ J}$$

Ter controle kunnen we nog nagaan of de lorentztransformatie van W' naar W de oorspronkelijke waarden van pc en E geeft.

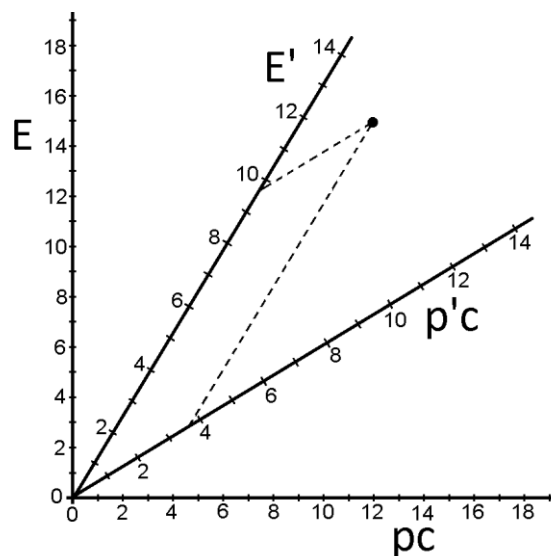
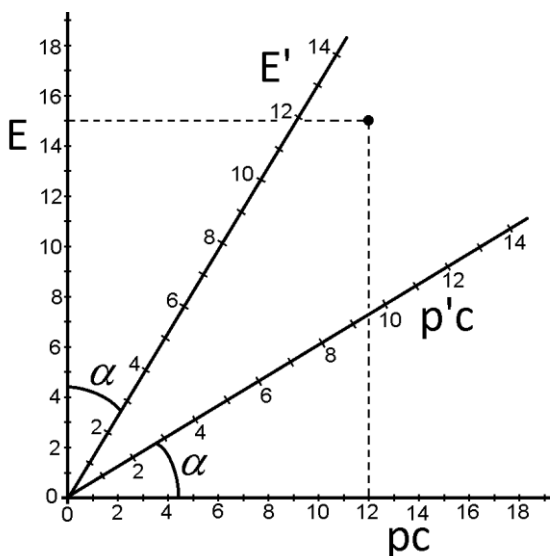
$$pc = \gamma \cdot (p'c + \beta \cdot E') = 1,25 \cdot (3,75 + 0,60 \cdot 9,75) = 12 \text{ J}$$

$$E = \gamma \cdot (E' + \beta \cdot p'c) = 1,25 \cdot (9,75 + 0,60 \cdot 3,75) = 15 \text{ J}$$

Klopt!

Minkowski-diagram

Eerder hebben we gezien dat de lorentztransformatie grafisch door het minkowskidiagram wordt weergegeven. Zie de onderstaande diagrammen waarin het bovenstaande rekenvoorbeeld is opgenomen.



De verticale en de horizontale as horen bij waarnemer W en de gekantelde assen horen bij waarnemer W'. Langs de assen staan de energie en de impuls keer lichtsnelheid.

Uit het linker diagram blijkt: $pc = 12 \text{ J}$, $E = 15 \text{ J}$.

Uit het rechter diagram blijkt $p'c = 3,75 \text{ J}$ en $E' = 9,75 \text{ J}$.

Opmerking

Overeenkomstig de minkowskidiagrammen die we eerder leerden kennen (bij het transformeren van de coördinaten van een gebeurtenis), geldt ook hier dat de onderlinge snelheid u tussen de waarnemers de hoekverdraaiing α van de gekantelde assen bepaalt. Ook bepaalt u de schaalfactor van de schaalverdeling langs de gekantelde assen ten opzichte van die langs de niet-gekantelde assen.

Invariantie van $E^2 - p^2c^2$

Een eigenschap van de lorentztransformatie is dat $E^2 - p^2c^2$ invariant is. Dus geldt:

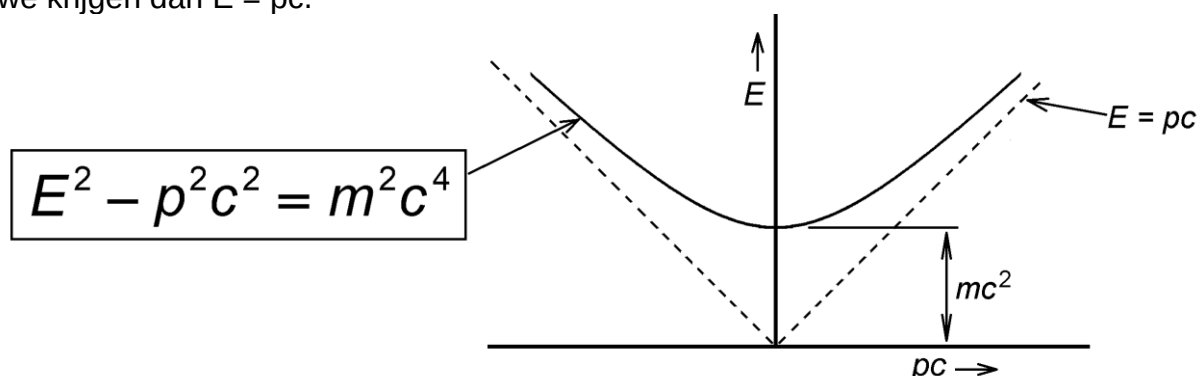
$$E^2 - p^2c^2 = E'^2 - p'^2c^2$$

Dit is analoog aan de invariantie van het ruimte-tijd-interval tussen twee gebeurtenissen, zoals we dat eerder zagen.

We kunnen de invariantie controleren aan de hand van het eerder gegeven getallenvoorbeeld. Inderdaad geldt: $15^2 - 12^2 = 9,75^2 - 3,75^2$.

Je kunt je afvragen hoe groot $E^2 - p^2c^2$ is. Omdat deze waarde voor elke waarnemer gelijk is, nemen we een bijzondere waarnemer in gedachten, namelijk degene die met het voorwerp meebeweegt. Voor hem staat het voorwerp stil en is de impuls dus gelijk aan nul. Voor hem is de energie uitsluitend rustenergie en voor hem geldt dus $E^2 = m^2c^4$. Daarmee hebben we het antwoord op onze vraag gevonden. Voor elke waarnemer is $E^2 - p^2c^2$ gelijk aan m^2c^4 .

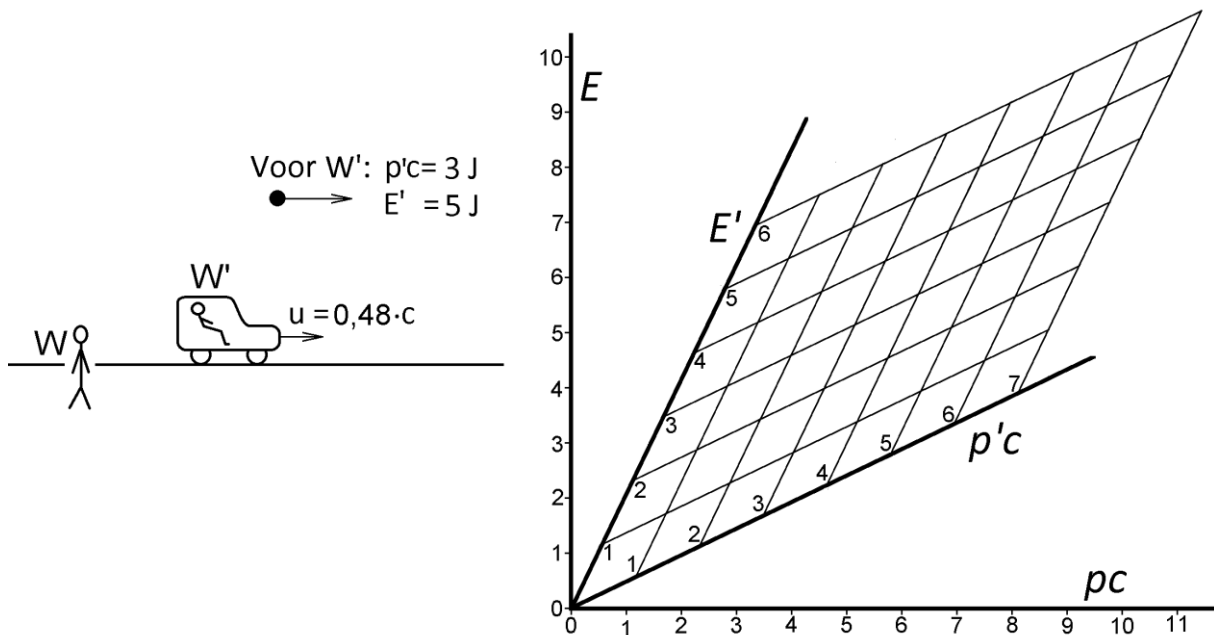
Samenvattend kunnen we zeggen dat er het onderstaande omkaderde verband tussen E en pc bestaat. In het diagram (rechts) is E tegen pc uitgezet. Als het voorwerp in rust is, geldt $pc = 0$ en volgt uit de formule $E = mc^2$ (zoals verwacht). In volgende paragrafen nemen we fotonen onder de loep. Voor fotonen geldt $m = 0$ en we krijgen dan $E = pc$.



Opgaven bij § 6

Opgave 1

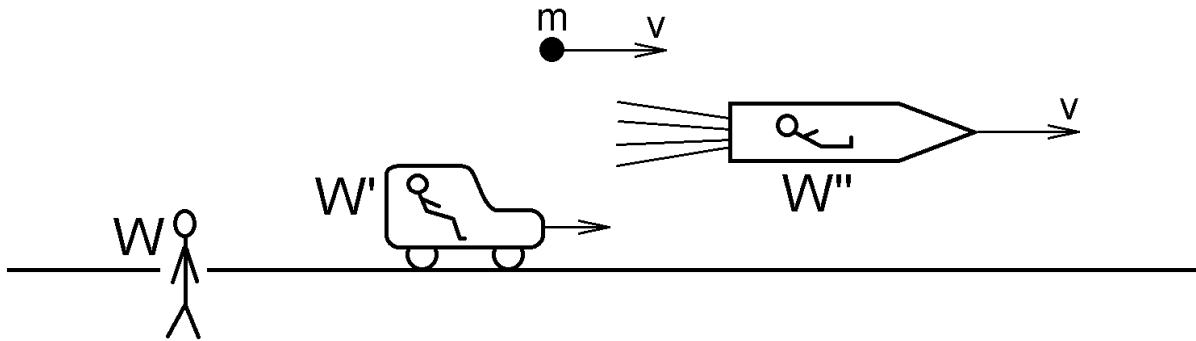
In de onderstaande linker figuur staat waarnemer W op de grond en beweegt waarnemer W' naar rechts met 48% van de lichtsnelheid. Voor waarnemer W' beweegt een klein deeltje naar rechts met een impuls keer lichtsnelheid van 3 J en een totale energie van 5 J.



- Bereken de waarden van β en γ .
- Bereken met de lorentztransformatie de impuls keer de lichtsnelheid pc voor de waarnemer W op de grond.
- Bereken met de lorentztransformatie de totale energie E voor de waarnemer W op de grond.
- Controleer de bij b en c. gevonden waarden met het minkowskidiagram dat hoort bij $u = 0,48 \cdot c$. Laat in het diagram zien hoe je aan je antwoord komt.

Opgave 2

In de onderstaande figuur bevinden zich drie waarnemers W, W' en W''. Vanuit W gezien beweegt W' met 30% van de lichtsnelheid naar rechts en W'' met 60% van de lichtsnelheid naar rechts. Vanuit W gezien beweegt een kogel met massa m ook met 60% van de lichtsnelheid naar rechts. De drie waarnemers zijn het oneens over twee grootheden namelijk 1) de (totale) energie van de kogel en 2) de impuls van de kogel keer de lichtsnelheid.



- Voor welke van de drie waarnemers zijn deze twee grootheden het grootst?
- Voor welke van de drie waarnemers zijn deze twee grootheden achtereenvolgens mc^2 en 0?
- Zijn de waarnemers het eens of oneens over de waarde van de eerste grootheid min de tweede grootheid?
- Zijn de waarnemers het eens of oneens over de waarde van het kwadraat van de eerste grootheid min het kwadraat van de tweede grootheid?

Opgave 3

Substitueer de formules $E = \frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ en $p = \frac{m \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ in $E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$.

Laat vervolgens zien dat het linker lid van de vergelijking gelijk is aan het rechterlid, namelijk $m^2 c^4$.

Opgave 4

Een voorwerp met massa m beweegt zo snel, dat zijn kinetische energie even groot is als zijn rustenergie.

a.

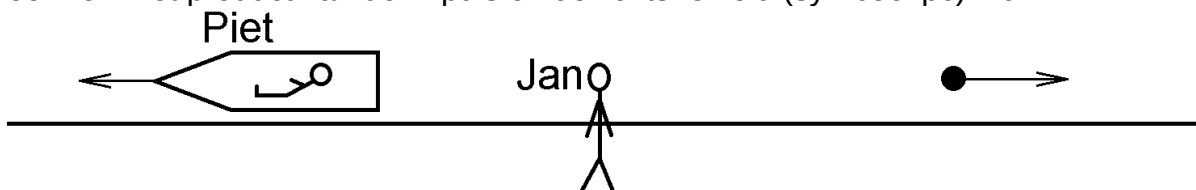
Leg uit dat in die situatie geldt: $E = 2 \cdot m \cdot c^2$.

b.

Toon met behulp van $E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$ aan dat dan voor de impuls van het voorwerp geldt: $p = \sqrt{3} \cdot mc$.

Opgave 5

In de onderstaande figuur is Jan een inertiaalwaarnemer (die dus niet versnelt of vertraagt) die een deeltje bestudeert dat met een constante snelheid beweegt. Voor Jan heeft het deeltje een totale energie (symbool E) van 3 J. Bovendien bedraagt voor hem het product van de impuls en de lichtsnelheid (symbool pc) 2 J.



a.

Bereken de waarde van de rustenergie van het deeltje.

Piet is ook een inertiaalwaarnemer die met een grote (constante) snelheid ten opzichte van Jan beweegt. Voor Jan bewegen Piet en het deeltje in tegengestelde richtingen van elkaar. Voor Piet heeft het deeltje een totale energie van 4 J.

b.

Bereken welke waarde het product van de impuls en de lichtsnelheid heeft voor Piet.

Opgave 6 (valt buiten de lesstof)

Een voorwerp met massa m en snelheid v heeft impuls p . Zolang de snelheid veel kleiner is dan de lichtsnelheid, geldt: $p = m \cdot v$.

a.

Substitueer deze uitdrukking voor p in de formule $E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$ en toon aan dat je dan krijgt:

$$E^2 = m^2 c^4 \cdot \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Omdat $\frac{v^2}{c^2}$ veel kleiner is dan 1, is $\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}$ bij benadering gelijk aan $1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2}$.

b.

Toon hiermee aan dat de bij a. gevonden uitdrukking overgaat in:

$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$ en dat we daarmee de oude vertrouwde formule voor de kinetische energie terug krijgen.

§ 7 Fotonen

Impuls en energie van massaloze deeltjes (fotonen)

In de vorige paragraaf maakten we kennis met de volgende formule:

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$$

Hierin is E de totale energie van een deeltje, p de impuls van het deeltje en m de massa van het deeltje.

Fotonen zijn lichtdeeltjes die met de lichtsnelheid gaan ($v = c$) en geen massa hebben ($m = 0$). Fotonen hebben naast een energie E ook een impuls p. Het verband tussen deze p en E kan worden gevonden door in de bovenstaande formule $m = 0$ te stellen. We krijgen dan:

$$E_f = p_f c$$

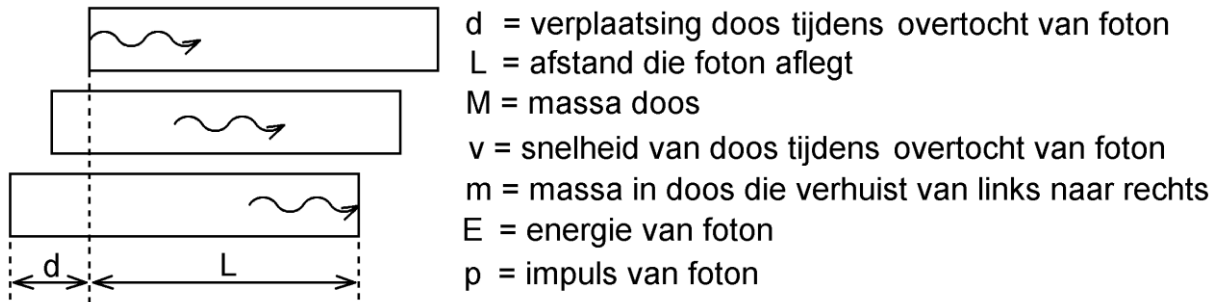
Als zonlicht op je huid valt, voelt dat warm aan. Het is dan ook voor iedereen duidelijk dat fotonen energie hebben. Het feit dat fotonen ook een impuls hebben, is niet zo logisch. Je voelt namelijk niet dat de fotonen van het zonlicht je naar achteren duwen. Toch is dit wel het geval: elk foton, dat op je valt, levert een klein stootje in zijn bewegingsrichting. De impuls van een stroom fotonen levert een soort 'stralingsdruk' op. Zo voorkomt de stralingsdruk van de naar buiten gaande fotonen in de zon dat de zon onder zijn eigen gewicht instort. Ook heeft de stralingsdruk (deels) te maken met het feit dat de staart van kometen van de zon af gericht is.

Je kunt het bovenstaande verband tussen de fotonenergie en de fotonimpuls ook op een andere manier vinden namelijk door de relativistische uitdrukking voor de totale energie van een bewegend materiedeeltje te delen door de relativistische uitdrukking voor zijn impuls. Als je vervolgens v gelijk stelt aan c (wat voor een foton het geval is), krijg je het bovenstaande verband. Dit is hieronder uitgewerkt.

$$\frac{E}{p} = \frac{\frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}{\frac{m \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{c^2}{v} \overset{\text{foton: } v = c}{=} c$$

Gedachtenexperiment van Einstein (geen verplichte lesstof)

Einstein liet in een gedachtenexperiment een foton in een doos van de linker naar de rechter kant gaan en daar absorberen. Zie de onderstaande figuur met drie achtereenvolgende tijdopnamen. Oorspronkelijk is de doos in rust. Het foton en de doos zetten zich bij de linker kant tegen elkaar af. Het gevolg is dat de doos naar links gaat bewegen. Nadat het foton de rechter kant van de doos heeft bereikt, wordt de snelheid van de doos opnieuw nul (de impuls van het geheel is nul). In de figuur staan de gebruikte symbolen die verderop gebruikt worden.



Na het vertrekken van het foton geldt volgens de wet van impuls:

$$M \cdot v = E/c (= p) \quad (\text{vergelijking 1}).$$

Voor de tijdsduur van de overtocht van het foton geldt:

$$d / v = L / c \quad (\text{vergelijking 2}).$$

Omdat er geen externe krachten op de doos werken, blijft het massamiddelpunt (zwaartepunt) op dezelfde plaats tijdens de overtocht van het foton. Omdat de doos over een afstand d naar links is bewogen, moet er binnen de doos een zekere massa m naar rechts zijn verschoven. Dit kan alleen door het foton veroorzaakt zijn. Om het massamiddelpunt niet te laten verschuiven, moet gelden:

$$M \cdot d = m \cdot L \quad (\text{vergelijking 3}).$$

We kunnen de bovenstaande drie vergelijkingen nu combineren.

Als we vergelijking 3 delen door vergelijking 2, krijgen we

$$M \cdot v = m \cdot c.$$

Als we deze vergelijking combineren met vergelijking 1, krijgen we tenslotte de beroemde formule

$$E = m \cdot c^2.$$

We kunnen samenvattend het volgende stellen. Terwijl een foton zelf geen massa heeft, draagt het wel bij aan de massa van een systeem volgens $E = m \cdot c^2$.

Opgaven bij § 7

Opgave 1

Jan staat met schaatsen op spiegelglad ijs. Recht achter hem bevindt zich een zeer sterke lichtbron die fotonen uitzendt. Jan heeft een spiegel op zijn rug gebonden om de van achteren komende fotonen te reflecteren. Elke keer als een foton door de spiegel gereflecteerd wordt, krijgt Jan een stootje naar voren. De impuls die Jan daarbij krijgt, is twee keer zo groot als de impuls van het foton.

a.

Leg dat laatste kort uit. Vergelijk dit bijvoorbeeld met het vangen en het teruggooien van een bal.

De massa van Jan (inclusief spiegel en schaatsen) bedraagt 50 kg. De fotonen die de lichtbron uitzendt, hebben allemaal een energie van $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ($= 1,0 \text{ eV}$).

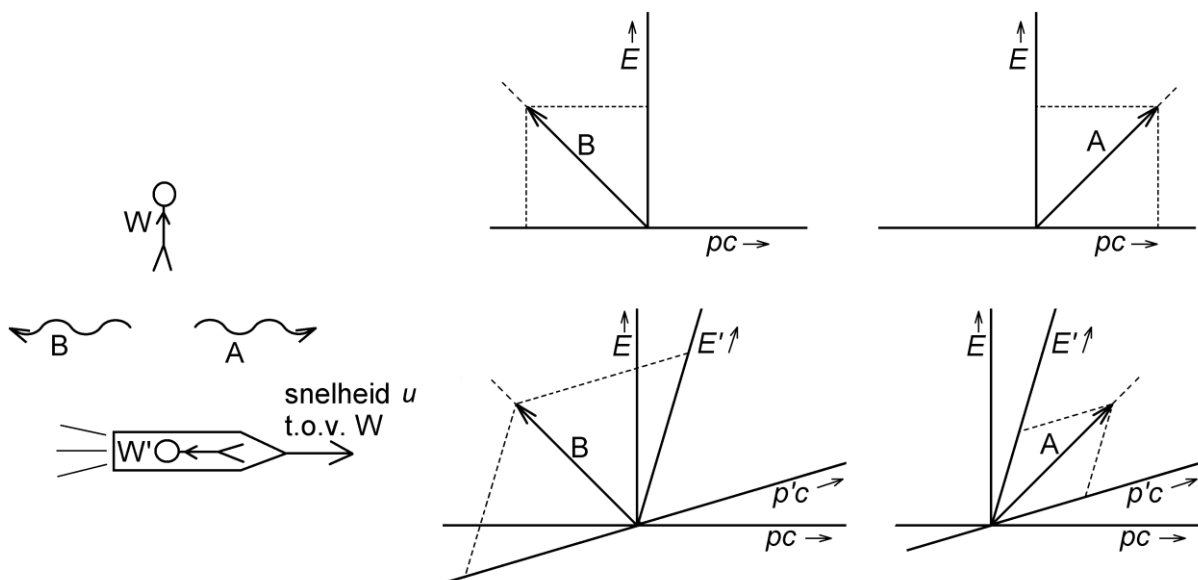
b.

Bereken hoeveel fotonen op de spiegel moeten vallen om Jan een snelheid van 1,0 m/s te geven. Verwaarloos alle wrijvingskrachten en het effect van fotonen uit andere richtingen.

Opgave 2

In de onderstaande linker figuur bewegen twee fotonen A en B in tegengestelde richting van elkaar. Voor waarnemer W zijn deze fotonen gelijk aan elkaar. Dat wil zeggen dat A en B gelijke energieën hebben en afgezien van het teken ook even grote impulsen hebben.

Waarnemer W' beweegt ten opzichte van W met hoge snelheid u naar rechts. Het gevolg hiervan is dat voor W' foton A minder energie heeft dan foton B.



In de figuur zijn ook vier minkowskidiagrammen getekend. Hierin zijn de fotonen A en B als pijlen weergegeven. Alle vier pijlen zijn even lang getekend. Uiteraard staan deze pijlen onder een hoek van 45° met de horizontale en de verticale as.

De bovenste twee diagrammen horen bij waarnemer W. De gekantelde assen zijn weggelaten. In de diagrammen zijn de waarden van E en pc geconstrueerd (zie stippellijnen). Ga na dat voor waarnemer W foton A evenveel energie heeft als foton B.

In de onderste twee diagrammen zijn de waarden van E' en $p'c$ voor waarnemer W' geconstrueerd (zie stippellijnen). Ga na dat voor W' foton B meer energie heeft dan foton A.

Voor foton A geldt dan de lorentztransformatie: $E' = \gamma(E - \beta \cdot pc)$

Hierin is $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ met $\beta = \frac{u}{c}$.

a.

Leg uit dat de lorentztransformatie geschreven kan worden als: $E' = \gamma(1 - \beta)E$.

b.

Substitueer de formule voor γ in de formule die bij vraag a. genoemd is.
Laat vervolgens zien dat voor foton A geldt:

$$E' = E \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.$$

Tip: bedenk dat $1 - \beta^2 = (1 + \beta) \cdot (1 - \beta)$

Foton B heeft een negatieve impuls omdat hij naar links beweegt. Hierdoor geldt voor foton B: $E' = \gamma(1 + \beta)E$. Hierbij is het minteken binnen de haakjes een plusteken geworden.

c.

Bewijs nu op dezelfde manier dat voor foton B geldt:

$$E' = E \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$

d.

Stel dat waarnemer W' met 60% van de lichtsnelheid ten opzichte van waarnemer W beweegt. Stel verder dat ieder foton (zowel A als B) voor waarnemer W een energie heeft van 1 eV (eV = elektronvolt). Bereken dan de energie van ieder foton voor waarnemer W' .

Opmerking

Omdat van een foton de energie E en de frequentie f evenredig met elkaar zijn, kunnen we de symbolen E en E' vervangen door f en f' . We krijgen dan de bekende formules voor het dopplereffect van EM-golven.

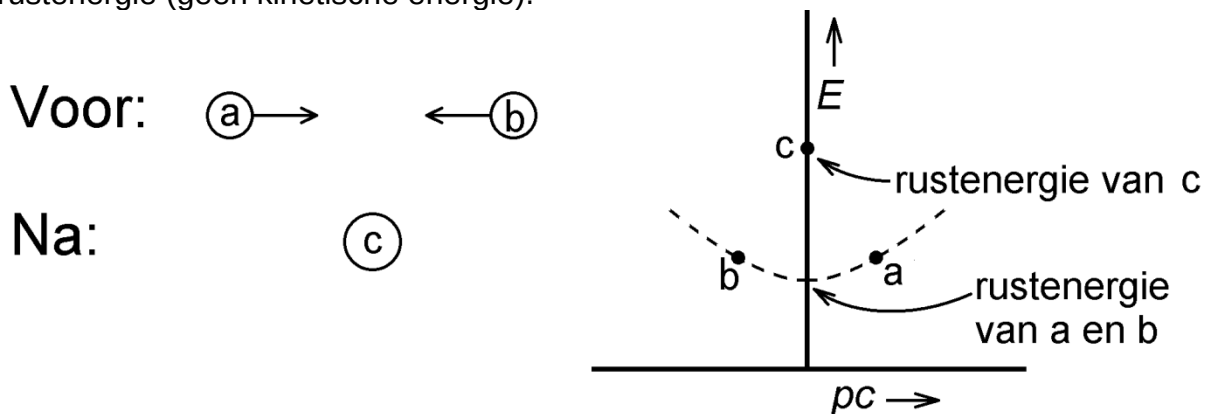
§ 8 Wisselwerking tussen (sub)atomaire deeltjes; grafische weergave

Wet van behoud van impuls en wet van behoud van energie

Als twee of meer deeltjes krachten op elkaar uitoefenen, gelden twee wetten namelijk 1) de wet van behoud van impuls en 2) de wet van behoud van energie. Dat geldt ook relativistisch! Bij de wet van behoud van energie mag de rustenergie niet weggelaten worden! In de volgende voorbeelden zullen we zien dat deeltjes, die energie opnemen, een grotere massa krijgen. De wet van behoud van massa geldt dus zeer beslist niet! Overigens gelden beide behoudswetten binnen elk inertiaalstelsel.

Voorbeeld 1: twee botsende deeltjes die één geheel vormen

Twee even zware deeltjes a en b botsen frontaal op elkaar en vormen daarbij één geheel namelijk deeltje c. Zie de onderstaande figuren. Vóór de botsing bewegen a en b met gelijke (zeer grote) snelheid naar elkaar toe. De totale impuls is daarom nul en dus is het nieuw gevormde deeltje c in rust. Dit nieuwe deeltje heeft alleen rustenergie (geen kinetische energie).

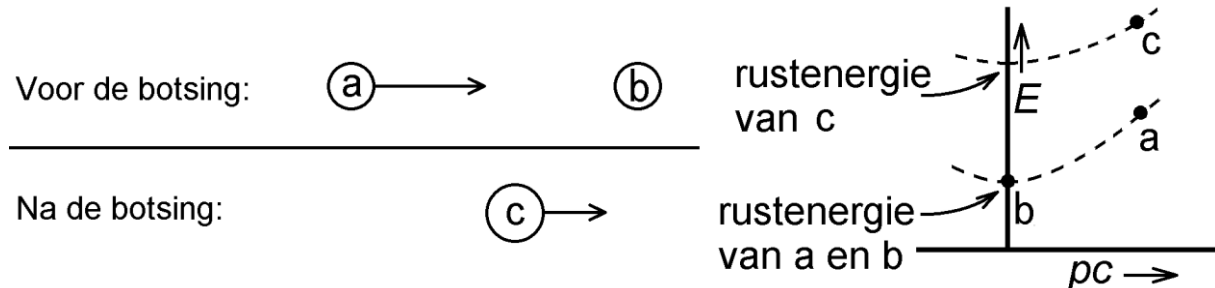


In het diagram zijn van de deeltjes de totale energie E (inclusief rustenergie!) en de impuls keer de lichtsnelheid pc tegen elkaar uitgezet. Elk deeltje wordt in het diagram als een stip weergegeven. De totale impuls vóór de botsing is nul. In het diagram volgt dit uit het feit dat stip a even ver rechts van de verticale as ligt als stip b links van deze as ligt. De impuls na de botsing is ook nul. Dit zie je eenvoudig in het diagram want stip c ligt op de verticale as. De totale energie blijft bij de botsing ook gelijk. Dit klopt met het feit dat de hoogte van stip c gelijk is aan de hoogte van stip a plus de hoogte van stip b.

De stippellijn in het diagram geeft het verband weer tussen E en pc behorende bij de massa van de oorspronkelijke deeltjes a en b. Het laagste punt van deze lijn is een maat voor de massa van deze deeltjes. Punt c ligt hoger dan twee keer de hoogte van dit laagste punt. Hieruit blijkt dat de oorspronkelijke totale massa (van de deeltjes a en b samen) kleiner is dan de uiteindelijke massa (van deeltje c).

Voorbeeld 2: twee botsende deeltjes die één geheel vormen

Dit voorbeeld gaat over dezelfde botsing als in voorbeeld 1 namelijk waarbij twee even zware deeltjes a en b frontaal op elkaar botsen en daarbij één geheel c vormen. We bekijken de botsing nu echter in het referentiestelsel waarin het oorspronkelijke deeltje b in rust is. Zie de onderstaande figuren waarbij het E-pc-diagram rechts is weergegeven.



In het E-pc-diagram bevinden de twee stippen a en b zich op dezelfde orthogonale hyperbool (want a en b hebben dezelfde massa). Het nieuw gevormde deeltje c bevindt zich in het diagram precies boven stip a. Hiermee is aan de wet van behoud van impuls voldaan. De hoogte van stip c is gelijk aan de opgetelde hoogtes van beide stippen a en b. Hiermee is ook aan de wet van behoud van energie voldaan.

De orthogonale hyperbool waar stip c op ligt is ook getekend. Het laagste punt van deze hyperbool is een maat voor de massa van deeltje c. Dit laagste punt ligt hoger dan twee keer de hoogte van het laagste punt van de onderste hyperbool. Dat betekent dat de massa van c groter is dan de opgetelde massa's van a en b.

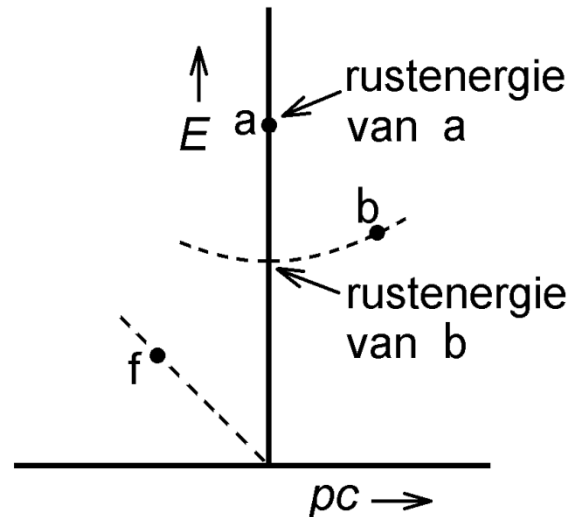
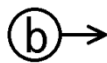
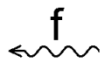
Voorbeeld 3: een atoom zendt een foton uit

Een in rust verkerend atoom a zendt een foton f uit dat naar links beweegt. Omdat het foton een impuls heeft, beweegt het nieuwe atoom b naar rechts waarbij de totale impuls nul blijft. Zie de onderstaande figuren. De energie (en dus ook de impuls) van het foton is zeer groot genomen om de veranderingen van het atoom goed zichtbaar te laten zijn.

Voor:



Na:

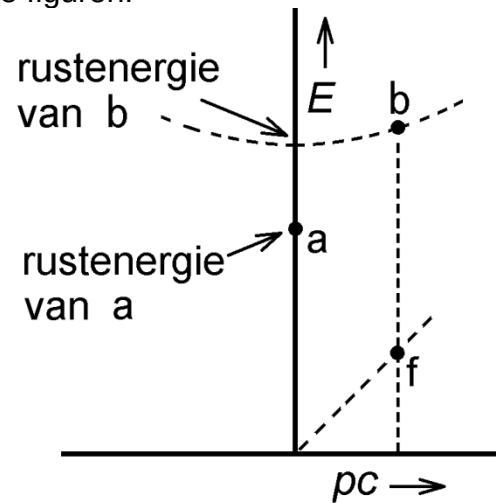
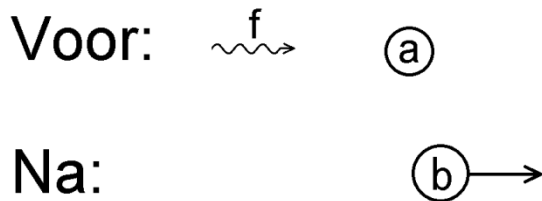


In het E-pc-diagram zijn atoom a, foton f en atoom b als stippen weergegeven. Stip a ligt op de verticale as wat betekent dat zijn impuls nul is. Stip b ligt even ver rechts van de verticale as als dat stip f links van de verticale as ligt. Na het uitzenden van het foton is de totale impuls dus nog steeds nul. Ook blijft de totale energie bij het uitzenden van het foton gelijk. Dit klopt met het feit dat de hoogte van stip a gelijk is aan de hoogte van stip f plus de hoogte van stip b.

De rustenergie van atoom b is lager dan die van atoom a. Een deel van de rustenergie van atoom a verandert namelijk in fotonenergie en een ander deel in kinetische energie van atoom b. De massa van atoom b is dan dus ook lager dan die van atoom a.

Voorbeeld 4: een atoom absorbeert een foton

Nu bekijken we het geval waarbij een stilstaand atoom a een van links komend (zeer energierijk!) foton f absorbeert. Omdat het foton een impuls heeft, beweegt het atoom b na de absorptie naar rechts. Zie de onderstaande figuren.



In het E-pc-diagram zijn de optredende deeltjes weergegeven. Ga na dat in de diagrammen de (totale) impuls en de (totale) energie behouden blijven bij de absorptie van het foton. Omdat de rustenergie van atoom b groter is dan die van atoom a, is de massa van atoom b ook groter.

Opgaven bij § 8

Opgave 1

Geef aan of de volgende beweringen waar of niet waar zijn.

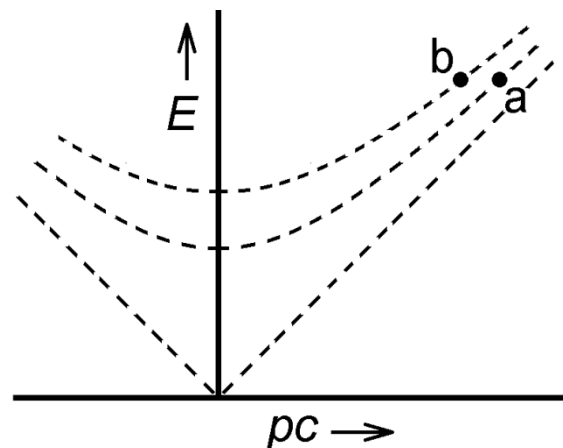
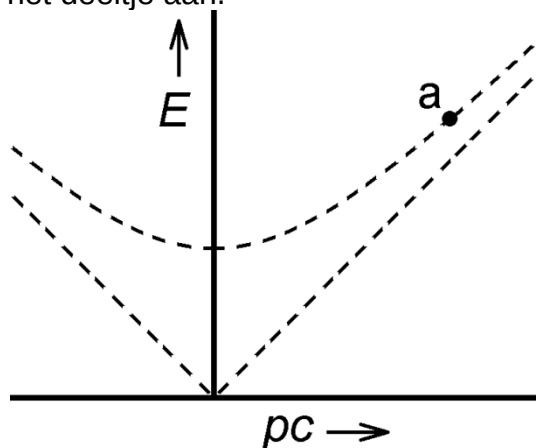
- 1)
Bij botsingen van (sub)atomaire deeltjes geldt de wet van behoud van impuls.
- 2)
Bij botsingen van (sub)atomaire deeltjes geldt de wet van behoud van energie.
- 3)
Bij botsingen van (sub)atomaire deeltjes geldt de wet van behoud van massa.
- 4)
Bij botsingen van (sub)atomaire deeltjes hoeft bij gebruik van de wet van behoud van energie de rustenergie niet in rekening gebracht te worden.
- 5)
Als een stilstaand (sub)atomair deeltje explodeert, is er vóór de explosie geen kinetische energie en na de explosie wel kinetische energie.
- 6)
Als een stilstaand (sub)atomair deeltje explodeert, blijft de totale massa gelijk of neemt deze toe.

Opgave 2

In het onderstaande linker E-pc-diagram hoort de stip bij deeltje a. De gestippelde kromme lijn stelt de eerder besproken orthogonale hyperbool voor.

a.

Geef in dit diagram langs de verticale as de rustenergie en de kinetische energie van het deeltje aan.



In het rechter E-pc-diagram horen de twee stippen bij deeltjes a en b. Beide stippen liggen even hoog in het diagram (ze hebben dus dezelfde totale energie).

b.

Heeft deeltje b meer of minder kinetische energie dan deeltje a?

Heeft deeltje b meer of minder rustenergie dan deeltje a?

Heeft deeltje b meer of minder massa dan deeltje a?

c.

Teken in het rechter E-pc-diagram een stip die hoort bij deeltje c dat dezelfde massa heeft als deeltje a maar met de helft van de kinetische energie.

Opgave 3

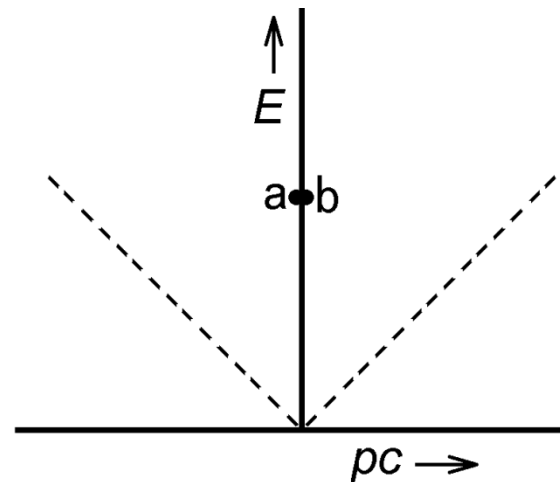
Bij radioactief verval van bepaalde isotopen ontstaat een zogenoemd 'positron'. Hiervan is de massa gelijk aan die van een elektron en de lading tegengesteld aan die van een elektron. Als een positron en een elektron bij elkaar komen, treedt er 'annihilatie' op. Zie de onderstaande figuren waarin a en b in rust zijn. Hierbij verdwijnen het positron a en het elektron b en daarvoor in de plaats komen twee gammafotonen f_1 en f_2 die dezelfde energie hebben. Teken in het E-pc-diagram de stippen die horen bij de fotonen f_1 en f_2 .

Voor:

a⁺ b⁻

Na:

f_1 f_2



Opgave 4

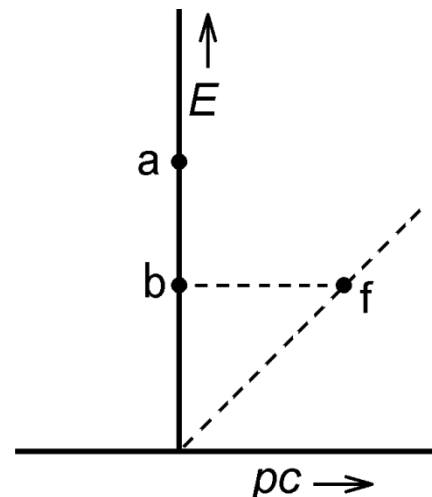
In de onderstaande figuren absorbeert een in rust verkerend deeltje a een van links komend foton f. Tijdens de absorptie vormen zich twee deeltjes b en c. Deeltje b is nog steeds in rust en heeft een rustenergie die gelijk is aan de fotonenergie. Het andere deeltje c beweegt naar rechts.

Voor:

f (a)

Na:

(b) (c) →



a.

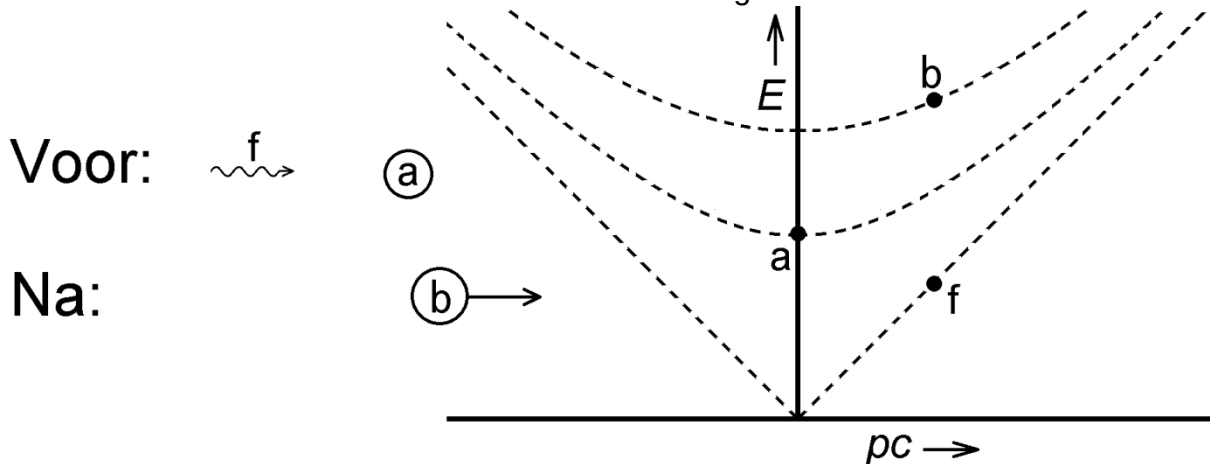
Teken in het E-pc-diagram de stip die bij deeltje c hoort. Geef duidelijk aan hoe je aan je antwoord komt.

b.

Hoe kun je in het diagram zien dat deeltje c een kleinere massa heeft dan deeltje a?

Opgave 5

Een vrij atoom in de grondtoestand kan een foton absorberen en komt dan in één van zijn 'aangeslagen' toestanden. Het atoom krijgt daarmee iets meer rustenergie en dus ook iets meer massa. Zie de onderstaande figuren.

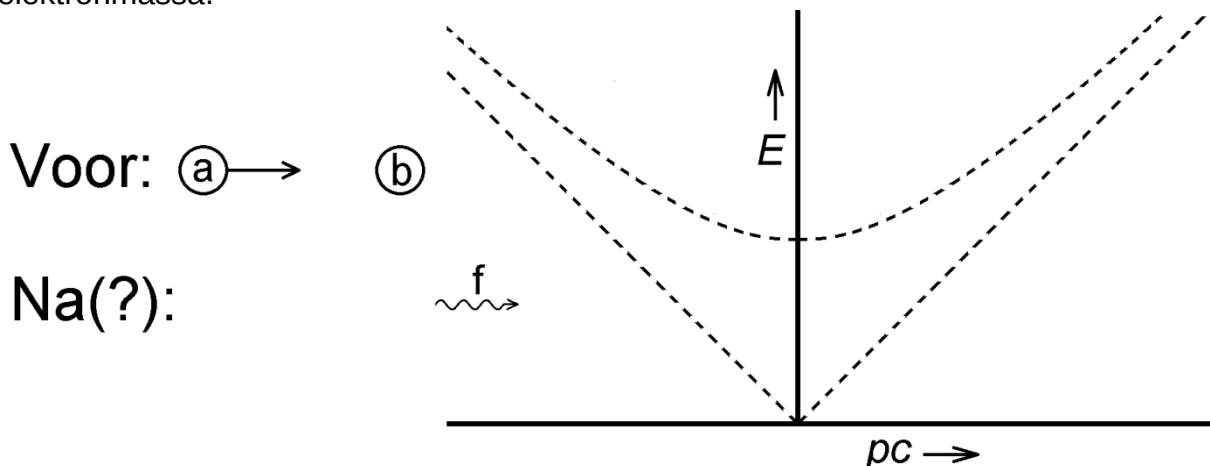


Een vrij elektron kan geen foton absorberen omdat het een elementair deeltje is zonder mogelijke aangeslagen toestanden. Anders gezegd: het elektron heeft slechts één waarde voor de rustenergie en dus ook één waarde voor de massa.

Leg nu kort uit waarom de bovenste gestippelde hyperbool in het diagram bij een elektron niet bestaat.

Opgave 6

In de onderstaande linker figuur botst een snel positron a op een stilstaand elektron b. Het positron heeft dezelfde massa als een elektron maar een tegengestelde lading. In het E-pc-diagram (rechts) hoort de gestippelde hyperbool bij de elektronmassa.



a.

Geef met twee stippen in het diagram het positron (a) en het elektron (b) weer.

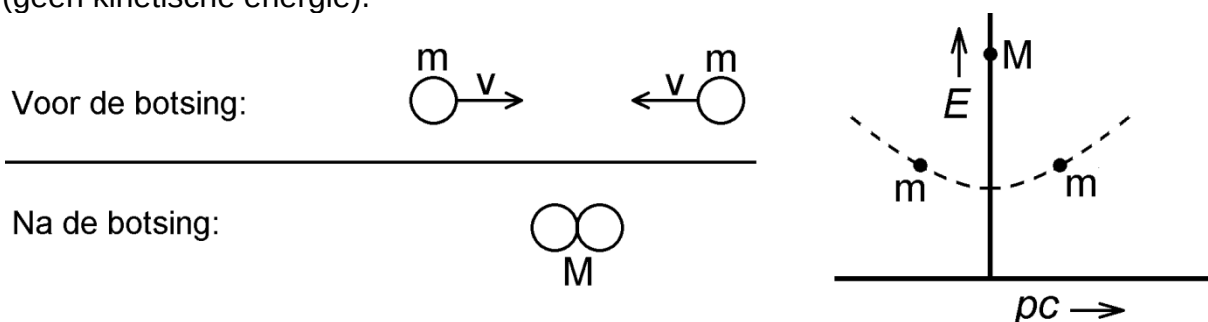
b.

Leg uit of de twee deeltjes kunnen verdwijnen en er hierbij een foton ontstaat (annihilatie dus)?

§ 9 Wisselwerking tussen (sub)atomaire deeltjes; berekeningen

Voorbeeld 1: twee botsende deeltjes die één geheel vormen

Twee even zware deeltjes, ieder met massa m , botsen frontaal op elkaar en vormen daarbij één geheel. Het nieuw gevormde deeltje heeft massa M . We bekijken de botsing in het referentiestelsel van het massamiddelpunt (zwaartepunt) van het geheel. Zie de onderstaande figuren waarbij het E-pc-diagram rechts is weergegeven. Het linker deeltje beweegt met snelheid v naar rechts en het rechter deeltje beweegt met snelheid v naar links. Na de botsing is het geheel in rust. Omdat het nieuw gevormde deeltje in rust is, heeft het géén impuls en alleen rustenergie (geen kinetische energie).



Volgens de wet van behoud van impuls geldt:

$$p(\text{linker deeltje}) + p(\text{rechter deeltje}) = 0$$

Als we de formule voor de impuls invullen, krijgen we:

$$\frac{m \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m \cdot -v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0.$$

Zoals verwacht wordt aan de wet van behoud van impuls voldaan voor elke waarde van m .

Volgens de wet van behoud van energie geldt:

$$E(\text{linker deeltje}) + E(\text{rechter deeltje}) = E(\text{nieuwe deeltje}).$$

Als we de formule voor de energie invullen, krijgen we:

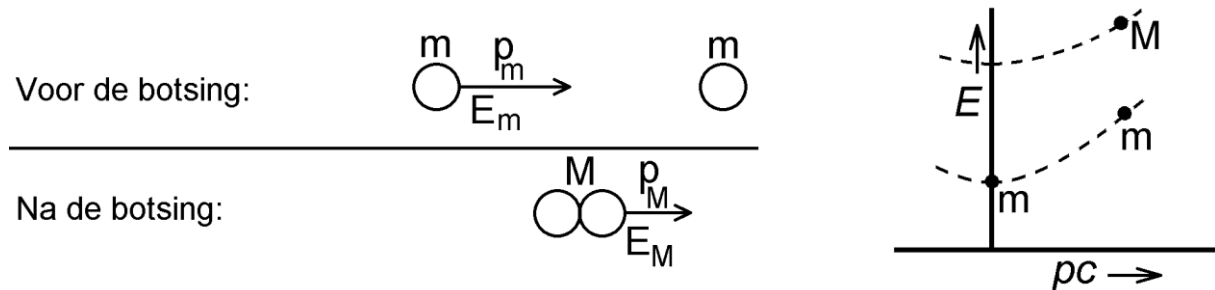
$$\frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = M \cdot c^2.$$

Uit de laatste vergelijking volgt dat:
$$M = \frac{2 \cdot m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

We zien dat de massa M na de botsing groter is dan de oorspronkelijke massa $2 \cdot m$ van de materie. Dit komt omdat bewegingsenergie is omgezet in rustenergie.

Voorbeeld 2: twee botsende deeltjes die één geheel vormen

Dit voorbeeld gaat over dezelfde botsing als in voorbeeld 1. We bekijken de botsing nu echter in het referentiestelsel waarin het oorspronkelijke rechter deeltje in rust is. Zie de onderstaande figuren.



De bewegingstoestand van de bewegende deeltjes beschrijven we deze keer niet met de snelheid maar met de impuls p en de energie E . Dit is ook in andere 'botsingsgevallen' vaak het geval zoals we in de rest van deze paragraaf zullen zien. Zo heeft het oorspronkelijke linker deeltje een impuls p_m en een energie E_m . Het oorspronkelijke rechter deeltje heeft geen impuls en zijn energie is alleen rustenergie mc^2 . Na de botsing heeft het nieuw gevormde deeltje een impuls p_M en een energie E_M . We willen een uitdrukking voor de eindmassa M afleiden.

Uit de wet van behoud van energie volgt:

$$E_m + mc^2 = E_M.$$

Na het kwadrateren van het linker- en rechterlid krijgen we:

$$E_m^2 + m^2c^4 + 2E_m mc^2 = E_M^2$$

Door gebruik te maken van de formule $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ krijgen we:

$$p_m^2c^2 + m^2c^4 + m^2c^4 + 2E_m mc^2 = p_M^2c^2 + M^2c^4$$

Volgens de wet van behoud van impuls geldt:

$$p_m = p_M.$$

Hierdoor vallen twee termen in de vergelijking tegen elkaar weg en we vinden dan:

$$2 \cdot m^2c^4 + 2E_m mc^2 = M^2c^4$$

Alle termen delen door c^4 geeft:

$$2m^2 + \frac{2E_m m}{c^2} = M^2$$

Hieruit volgt:

$$M^2 = 2m^2 \left(1 + \frac{E_m}{mc^2} \right)$$

Hieruit volgt:

$$M = 2m \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{E_m}{mc^2}}$$

Deze vergelijking voor M is gelijkwaardig aan de vergelijking voor M in voorbeeld 1. In beide gevallen is de massa M na de botsing groter dan de oorspronkelijke massa $2 \cdot m$. Bedenk hierbij dat E_m groter is dan mc^2 .

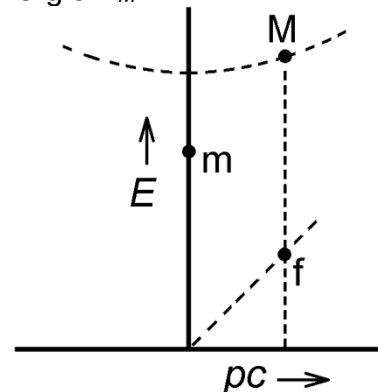
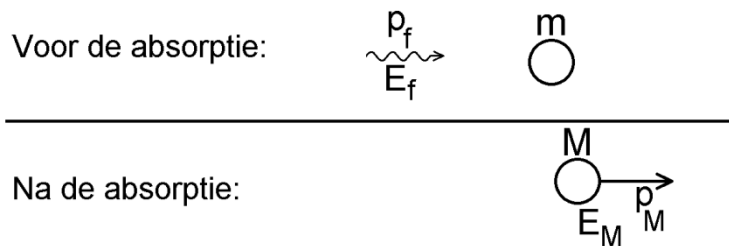
Voorbeeld 3: een atoom absorbeert een foton

Nu bekijken we het geval waarbij een stilstaand atoom een van links komend foton absorbeert. Omdat het foton een impuls heeft, beweegt het atoom na de absorptie naar rechts. Zie de onderstaande figuren.

Het foton heeft impuls p_f en energie E_f .

Vóór de absorptie heeft het atoom massa m en géén impuls. Zijn energie is dus slechts rustenergie ($= mc^2$).

Na de absorptie heeft het atoom massa M , impuls p_M en energie E_M .



We willen een uitdrukking voor de atoommassa M na de absorptie van het foton afleiden. Hieronder gebruiken we naast c (= lichtsnelheid) alleen de symbolen die in de linker figuur staan.

Volgens de wet van behoud van energie geldt:

$$E_f + mc^2 = E_M.$$

Als we het linker- en rechterlid kwadrateren, krijgen we:

$$E_f^2 + m^2c^4 + 2E_fm c^2 = E_M^2.$$

Door gebruik te maken van de formule $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ krijgen we:

$$p_f^2c^2 + m^2c^4 + 2E_fm c^2 = p_M^2c^2 + M^2c^4$$

Volgens de wet van behoud van impuls geldt:

$$p_f = p_M.$$

We vinden dan:

$$m^2c^4 + 2E_fm c^2 = M^2c^4$$

Alle termen delen door c^4 geeft:

$$m^2 + \frac{2E_fm}{c^2} = M^2$$

Hieruit volgt:

$$M^2 = m^2 \left(1 + \frac{2E_f}{mc^2} \right)$$

Hieruit volgt uiteindelijk:

$$M = m \cdot \sqrt{1 + \frac{2E_f}{mc^2}}.$$

Uit het feit dat de wortel in de bovenstaande formule altijd groter dan 1 is, blijkt dat de massa van het atoom is toegenomen. Dit is begrijpelijk, want de energie van het foton is voor een deel in rustenergie omgezet (en voor het andere deel in kinetische energie van het atoom).

Opmerking

Vanuit de wiskunde weten we dat als x veel kleiner dan 1 is, de wortel $\sqrt{1+2x}$ bij benadering gelijk is aan $1+x$. Dit kunnen we in de laatste vergelijking toepassen. Als $2E_f$ heel klein is ten opzichte van mc^2 , krijgen we:

$$M = m + \frac{E_f}{c^2}.$$

Deze vergelijking volgt direct uit de wet van behoud van energie als we aannemen dat het atoom na de fotonabsorptie een verwaarloosbare kinetische energie heeft. Ga dat na.

Kort overzicht van achtereenvolgende stappen in voorbeeld 2 en 3

In voorbeeld 2 en 3 beschreven we de bewegingstoestand van de deeltjes met de impuls p en energie E . De volgende stappen werden doorlopen. Deze stappen worden ook doorlopen bij de opgaven 3 en verder van deze paragraaf.

Stap 1: pas de wet van behoud van energie toe.

Stap 2: kwadrateren

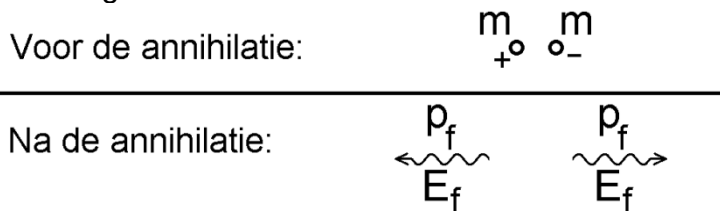
Stap 3: Vul in: $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$.

Stap 4: Met de wet van behoud van impuls kun je termen met p^2 wegstrepen.

Opgaven bij § 9

Opgave 1

Bij radioactief verval van bepaalde isotopen ontstaat een zogenoemd 'positron'. Hiervan is de massa m gelijk aan die van een elektron en de lading tegengesteld aan die van een elektron. Als een positron en een elektron bij elkaar komen, treedt er 'annihilatie' op. Zie de onderstaande figuur. Hierbij verdwijnen het positron en het elektron en daarvoor in de plaats komen twee gammafotonen, allebei met impuls p_f en energie E_f .



a.

Leg uit dat na de annihilatie de twee fotonen in tegengestelde richting bewegen. Ga er daarbij vanuit dat het positron en het elektron vóór de annihilatie een verwaarloosbare snelheid hebben.

b.

Leid een formule af waarin de energie E_f van elk foton uit de massa m van het positron (en van het elektron) berekend kan worden.

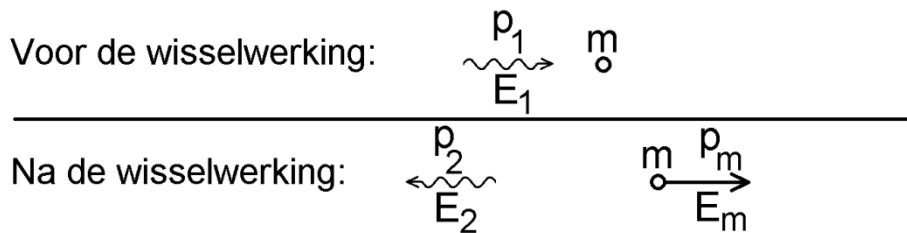
De massa van een elektron is $9,11 \cdot 10^{-31}$ kg.

c.

Bereken de energie van elk foton.

Opgave 2

In de onderstaande figuur 'botst' een foton met impuls p_1 en energie E_1 op een stilstaand elektron met massa m . Na de botsing beweegt het elektron naar rechts met impuls p_m en (totale) energie E_m . Zijn massa is nog steeds m omdat het elektron een elementair deeltje is dat geen energie kan absorberen (er zijn geen 'aangeslagen' toestanden van het elektron). Verder beweegt er een foton naar links met impuls $-p_2$ en energie E_2 . Het minteken komt voort uit de afspraak dat de impuls naar rechts positief is.



Het nieuw ontstane foton, dat dus naar links gaat, heeft minder energie dan het oorspronkelijke foton. Dat is logisch want een deel van de energie van het oorspronkelijke foton wordt omgezet in kinetische energie van het elektron. Het verband tussen beide fotonenergieën wordt gegeven door de volgende vergelijking.

$$\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} = \frac{2}{m \cdot c^2}.$$

Deze vergelijking volgt uit het combineren van de volgende twee vergelijkingen waarbij de elektronenergie E_m geëlimineerd wordt. De wiskunde van dit combineren is niet moeilijk maar blijft in deze opgave buiten beschouwing.

Vergelijking 1: $E_1 - E_2 = E_m - mc^2$

Vergelijking 2: $E_1 + E_2 = \sqrt{E_m^2 - m^2 c^4}$

a.

Bewijs dat vergelijking 1 uit de wet van behoud van energie volgt.

b.

Bewijs dat vergelijking 2 uit de wet van behoud van impuls volgt.

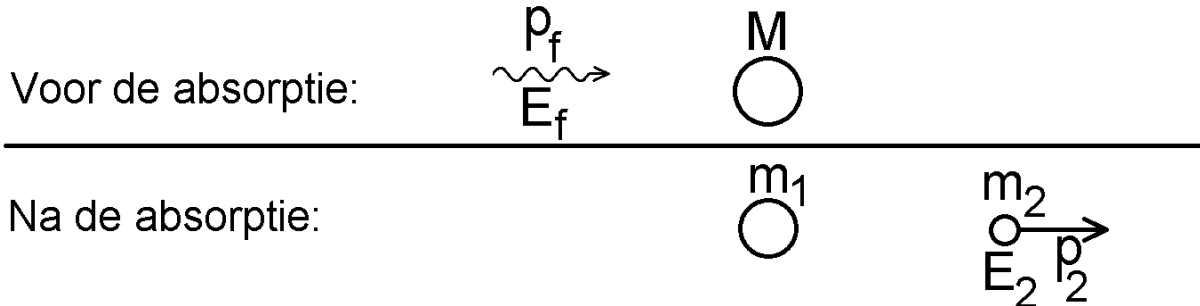
Tip: pas de formule $pc = E$ toe op de twee fotonen en $p^2 c^2 = E^2 - m^2 c^4$ toe op het elektron.

Opmerking

De wisselwerking tussen een foton en een elektron zoals hierboven wordt het Compton effect genoemd. In deze opgave wordt echter alleen het eendimensionale geval bekeken.

Opgave 3

In de onderstaande figuur absorbeert een in rust verkerend deeltje met massa M een foton met impuls p_f en energie E_f . Tijdens de absorptie vormen zich twee deeltjes. Het ene deeltje heeft massa m_1 en is nog steeds in rust. Het andere deeltje heeft massa m_2 , impuls p_2 en energie E_2 .



In deze opgave gaan we bewijzen dat voor de massa m_2 geldt:

$$m_2 = (M - m_1) \cdot \sqrt{1 + \frac{2E_f}{(M - m_1)c^2}}$$

Merk op dat $(M - m_1)$ de oorspronkelijke massa is die in beweging komt. De te bewijzen formule heeft sterke overeenkomsten met de formule uit voorbeeld 3 van de leestekst.

a.

Bewijs dat uit de wet van behoud van energie volgt:

$$E_f + (M - m_1)c^2 = E_2$$

Gebruik hierbij alleen de in de figuur aangegeven grootheden (samen met c).

b.

Na kwadrateren van het linker- en rechterlid van de vergelijking in vraag a volgt:

$$E_f^2 + (M - m_1)^2 c^4 + 2E_f \cdot (M - m_1)c^2 = E_2^2.$$

Deze formule kan met de formule $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ herschreven worden als:

$$p_f^2 c^2 + (M - m_1)^2 c^4 + 2E_f \cdot (M - m_1)c^2 = p_2^2 c^2 + m_2^2 c^4.$$

Leg uit waarom E_f^2 geschreven kan worden als $p_f^2 c^2$ in plaats van $p_f^2 c^2 + m_f^2 c^4$?

c.

Leg uit dat met behulp van de wet van behoud van impuls de laatste vergelijking vereenvoudigd kan worden tot:

$$(M - m_1)^2 c^4 + 2E_f \cdot (M - m_1)c^2 = m_2^2 c^4$$

d.

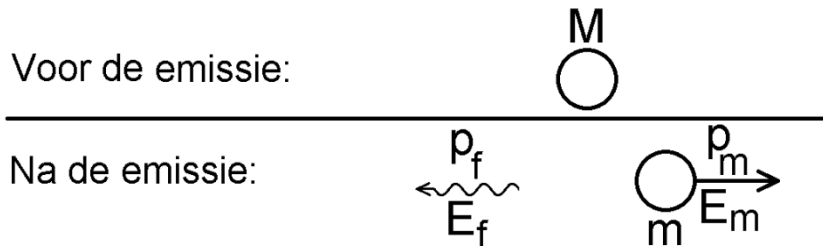
Laat zien dat uit de vergelijking in vraag c de bovenstaande formule voor m_2 volgt.

Opgave 4

Een in rust verkerend atoom met massa M zendt een foton uit met energie E_f en impuls p_f . Zie de onderstaande figuur. Na de emissie van het foton heeft het atoom massa m , impuls p_m en (totale) energie E_m . Voor de massa m geldt:

$$m = M \cdot \sqrt{1 - \frac{2 \cdot E_f}{M \cdot c^2}}.$$

Aan de hand van de volgende vragen gaan we deze formule bewijzen. De werkwijze in deze opgave lijkt op die in voorbeeld 3 van de leestekst. Gebruik in je antwoorden naast de lichtsnelheid c alleen de in de figuur voorkomende symbolen.



Volgens de formule is m kleiner dan M . De massa van het atoom is blijkbaar kleiner geworden door het uitzenden van een foton.

a.

Leg kort uit hoe je dat kunt begrijpen.

b.

Bewijs dat uit de wet van behoud van energie volgt:

$$M^2 c^4 + E_f^2 - 2 \cdot M c^2 \cdot E_f = E_m^2.$$

c.

Bewijs dat uit de vergelijking van vraag b samen met de wet van behoud van impuls volgt dat:

$$M^2 c^4 - 2 \cdot M c^2 \cdot E_f = m^2 c^4$$

d.

Laat zien dat uit de vergelijking van vraag c. de bovenstaande formule voor m volgt.

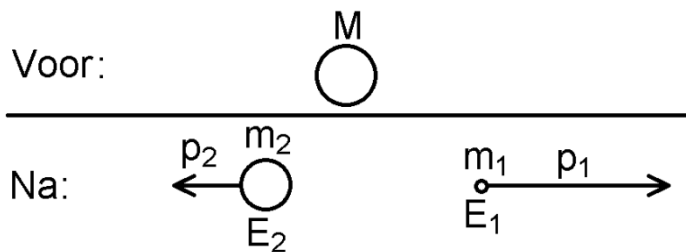
Opgave 5

Een stilstaand deeltje met massa M valt uiteen in twee deeltjes 1 en 2 die van elkaar vandaan bewegen. Deeltje 1 heeft massa m_1 , impuls p_1 en (totale) energie E_1 . Deeltje 2 heeft overeenkomstige grootheden met index 2. Zie de onderstaande figuur.

De energie van deeltje 1 volgt uit de massa's van de drie deeltjes volgens

$$E_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2 \cdot M} \cdot c^2.$$

Aan de hand van de volgende vragen gaan we deze formule bewijzen. Gebruik bij de beantwoording daarvan naast de lichtsnelheid c alleen de symbolen in de figuur.



a.

Bewijs dat uit de wet van behoud van energie volgt:

$$M^2 c^4 + E_1^2 - 2 \cdot M c^2 \cdot E_1 = E_2^2.$$

b.

Bewijs dat uit de vergelijking van vraag a samen met de wet van behoud van impuls volgt dat:

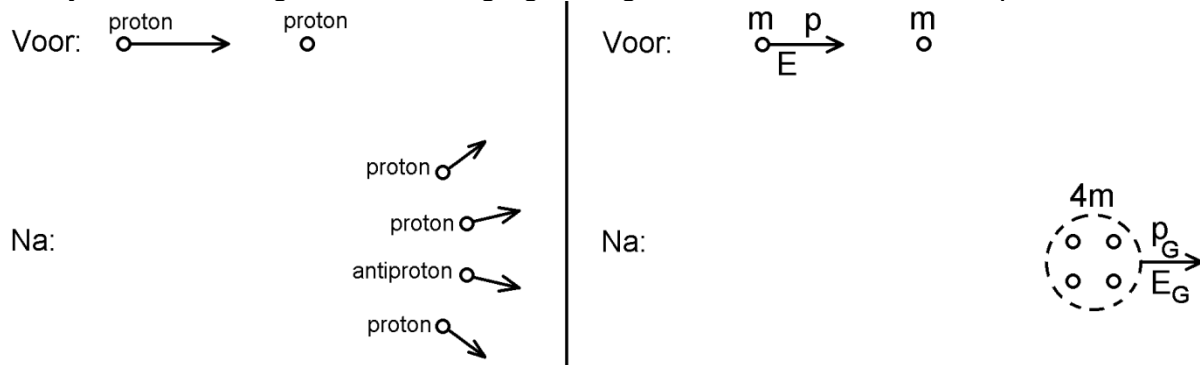
$$M^2 c^4 + m_1^2 c^4 - 2 \cdot M c^2 \cdot E_1 = m_2^2 c^4$$

c.

Laat zien dat uit de te bewijzen vergelijkingen bij a. en b. de bovenstaande formule voor E_1 volgt.

Opgave 6

In de onderstaande linker figuur botst een proton met hoge snelheid op een stilstaand proton. Bij de botsing ontstaan er twee extra deeltjes namelijk een proton en een antiproton. Een antiproton heeft precies dezelfde massa als een proton maar een tegengestelde lading. Na de botsing zijn er dus in totaal vier deeltjes: drie protonen en een antiproton. De benodigde rustenergie van de twee nieuw gevormde deeltjes is afkomstig van de bewegingsenergie van het aanstormende proton.



In de linker figuur bewegen de vier deeltjes na de botsing uit elkaar; in de rechter figuur bewegen de vier deeltjes min of meer als groep verder. In de rechter figuur heeft het aanstormende proton de minimale energie E om de reactie plaats te laten vinden. In deze opgave zijn we op zoek naar een uitdrukking voor deze minimale energie E van het aanstormende proton. De massa van een proton (en van een antiproton) is met m aangegeven. Verder zijn in de rechter figuur p en E de impuls en (totale) energie van het aanstormende deeltje. De groep van vier deeltjes, die na de botsing verder gaan, heeft massa $4m$, impuls p_G en (totale) energie E_G .

Alle volgende vragen hebben betrekking op de rechter figuur. Gebruik naast de lichtsnelheid c uitsluitend de symbolen in deze figuur.

a.

Bewijs dat uit de wet van behoud van energie volgt:

$$E^2 + m^2 c^4 + 2Emc^2 = E_G^2.$$

b.

Bewijs dat uit de vergelijking van vraag a samen met de wet van behoud van impuls volgt dat:

$$2m^2 c^4 + 2Emc^2 = (4m)^2 c^4.$$

c.

Laat zien dat uit de vergelijking van vraag b. volgt dat geldt:

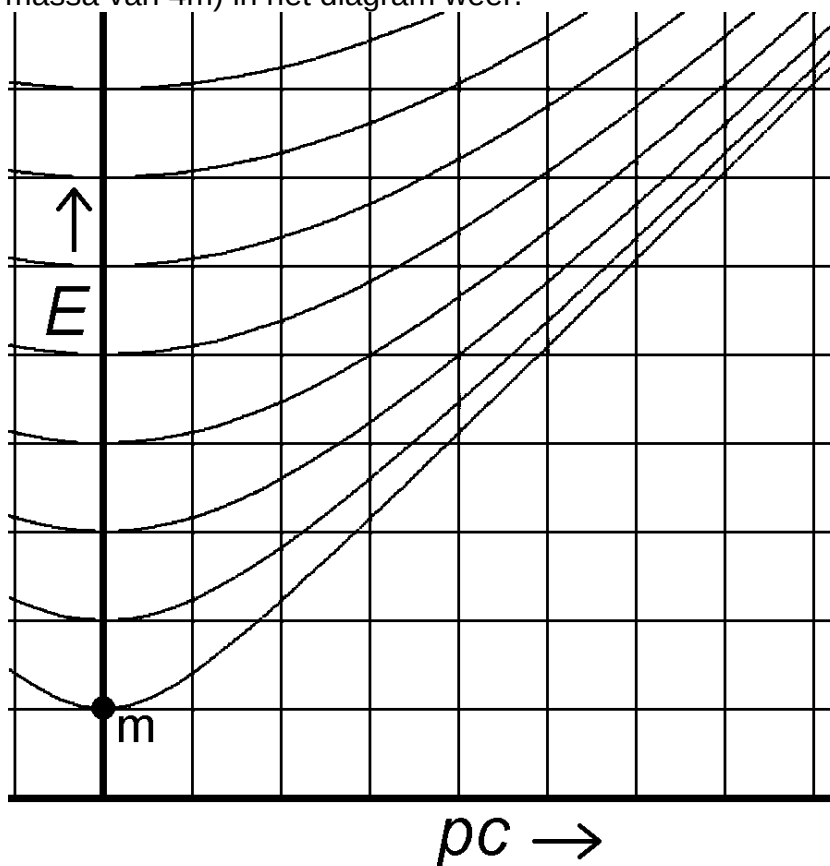
$$E = 7mc^2.$$

d.

Hoeveel keer is de kinetische energie groter dan de rustenergie van het aanstormende deeltje in de rechter figuur? Er is geen berekening nodig.

e.

In het onderstaande E-pc-diagram is het stilstaande proton vóór de botsing als een dikke stip weergegeven en aangeduid met de letter m. De kromme lijnen zijn net als hiervoor orthogonale hyperbolen. Geef met twee stippen het aanstormende proton vóór de botsing (met een energie van $7mc^2$) en de groep van vier deeltjes (met een massa van $4m$) in het diagram weer.



§ 10 Massadefect bij kernreacties

Elektronvolt

In de kernfysica wordt vaak gebruik gemaakt van de elektronvolt (afgekort eV) en de mega-elektronvolt (afgekort MeV) als eenheid van energie. Deze laatste is gelijk aan een miljoen elektronvolt. Een elektronvolt is als volgt gedefinieerd.

Eén elektronvolt is de energieverandering van een elektron als deze een spanning van 1 volt doorloopt.

Voor deze energie geldt dat ze gelijk is aan het product van de lading van het elektron ($1,602 \cdot 10^{-19}$ coulomb) maal de doorlopen spanning (1 volt).

We vinden dus: $1 \text{ elektronvolt} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ joule}$ (afgekort $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$).

Atomaire massa-eenheid

In de kernfysica wordt ook vaak gebruik gemaakt van de 'atomaire massa-eenheid'. Deze is als volgt gedefinieerd.

De atomaire massa-eenheid is gelijk aan een twaalfde van de massa van een koolstof-12 atoom in zijn grondtoestand (= laagste energietoestand).

De atomaire massa-eenheid wordt meestal aangeduid met u. De massa van een koolstof-12 atoom is per definitie gelijk aan 12 u. Ruwweg is één u gelijk aan de massa van een proton of een neutron want die deeltjes verschillen nauwelijks in massa en de massa van de elektronen is daarmee vergeleken verwaarloosbaar. Er geldt: $1 \text{ u} = 1,66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Rustenergie behorend bij 1 atomaire massa-eenheid

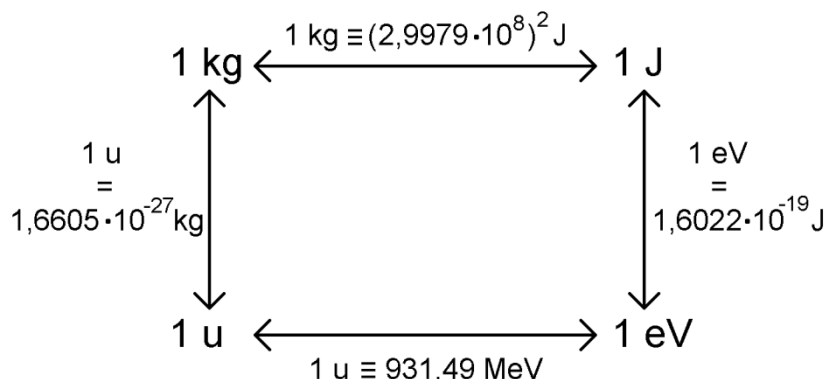
In de voorgaande paragraaf hebben we gezien dat een stilstaand deeltje met massa m een rustenergie E_0 heeft waarvoor geldt:

$$E_0 = m \cdot c^2.$$

Volgens deze formule heeft een voorwerp met een massa van 1 kg een rustenergie van $9 \cdot 10^{16}$ joule (want $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$; alles afgerond). We zoeken nu een soortgelijke regel voor de eenheden u (atomaire massa-eenheid) en MeV (mega elektronvolt).

Hierbij maken we gebruik van het schema hiernaast.

Eén atomaire massa-eenheid is gelijk aan $1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Eén kilogram komt overeen met $(2,9979 \cdot 10^8)^2 \text{ joule}$. Tenslotte is 1 joule gelijk aan $1/(1,6022 \cdot 10^{-19})$ elektronvolt. Met deze omrekenfactoren maken we de volgende berekening.

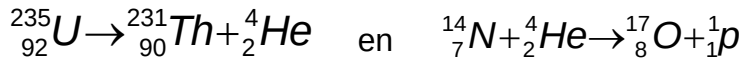


$$1\text{u} \equiv (1,6605 \cdot 10^{-27}) \cdot (2,9979 \cdot 10^8)^2 \cdot \left(\frac{1}{1,6022 \cdot 10^{-19}} \right) \text{eV} = 931,49 \text{ MeV}$$

Een massa van 1 u heeft dus een rustenergie van 931,49 MeV. In de rest van deze paragraaf zullen we dit veelvuldig gebruiken.

Massadefect

Hieronder staan twee voorbeelden van kernreacties.



De eerste reactie geeft het alfaverval van een uranium-235 kern weer. Een alfadeeltje (dus een helium-4 kern) wordt met grote snelheid weggeschoten waarbij een thorium-231 kern achterblijft. Bij de tweede reactie wordt een stikstof-14 kern beschoten met een alfadeeltje. Daarbij ontstaan een zuurstof-17 kern en een proton.

Bij de eerste reactie vindt er een afname van de massa plaats want de massa van de uraniumkern is groter dan de som van de massa's van de thoriumkern en van het alfadeeltje. Bij de tweede reactie vindt er een toename van de massa plaats. De som van de massa's van de stikstofkern en van het alfadeeltje is namelijk kleiner dan de som van de massa's van de zuurstofkern en van het proton. Het massaverschil tussen voor en na de reactie wordt in beide gevallen het massadefect genoemd.

Als de som van alle massa's bij een kernreactie afneemt (zoals bij de eerste reactie), zal de totale rustenergie natuurlijk ook afnemen. Volgens de wet van behoud van energie wordt een deel van de oorspronkelijke rustenergie dan omgezet in een andere energievorm. In ons voorbeeld is dat de kinetische energie van het alfadeeltje en van de thoriumkern. Als de som van alle massa's bij een kernreactie toeneemt (zoals bij de tweede reactie), zal de totale rustenergie ook toenemen. Volgens de wet van behoud van energie is een andere energievorm in deze extra rustenergie omgezet. In ons voorbeeld is dat de kinetische energie van het aanstormende alfadeeltje.

Uitwerking van de eerste kernreactie

We bekijken de eerstgenoemde kernreactie: ${}_{92}^{235}\text{U} \rightarrow {}_{90}^{231}\text{Th} + {}_2^4\text{He}$

De massa van de uraniumkern bedraagt 234,99345 u.

De massa van de thoriumkern bedraagt 230,98693 u.

De massa van de heliumkern (= alfadeeltje) bedraagt 4,00151 u.

Voor het massadefect Δm geldt:

$$\Delta m = 234,99345 \text{ u} - (230,98693 \text{ u} + 4,00151 \text{ u}) = 0,00501 \text{ u}.$$

We zien dat het massadefect heel klein is vergeleken met de diverse kernmassa's. Dat verklaart waarom we zoveel decimalen van de kernmassa's moeten betrekken in onze berekening.

Voor de vrijkomende energie ΔE geldt:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = 0,00501 \text{ u} \cdot 931,49 \text{ MeV/u} = 4,67 \text{ MeV}.$$

Verreweg het grootste deel van deze energie is kinetische energie van het alfadeeltje.

Uitwerking van de tweede kernreactie

We bekijken nu de tweede kernreactie: ${}^{14}_7\text{N} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{17}_8\text{O} + {}^1_1\text{p}$

De massa van de stikstofkern bedraagt 13,99923 u.

De massa van de heliumkern (= alfadeeltje) bedraagt 4,00151 u.

De massa van de zuurstofkern bedraagt 16,99474 u.

De massa van het proton bedraagt 1,00728 u.

Voor het massadefect Δm geldt:

$$\Delta m = (16,99474 \text{ u} + 1,00728 \text{ u}) - (13,99923 \text{ u} + 4,00151 \text{ u}) = 0,00128 \text{ u}.$$

Voor de benodigde energie ΔE geldt:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = 0,00128 \text{ u} \cdot 931,49 \text{ MeV/u} = 1,19 \text{ MeV}.$$

In de praktijk zal de kinetische energie van het alfadeeltje groter dan 1,19 MeV moeten zijn want na de reactie hebben het proton en de zuurstofkern ook kinetische energie.

Een systeem (stelsel) van deeltjes

Hieronder volgen drie regels die betrekking hebben op een geïsoleerd systeem (stelsel) van een aantal deeltjes. Denk hierbij aan alle voorbeelden in deze en de voorgaande paragrafen waarbij deeltjes (inclusief fotonen) een wisselwerking met elkaar hadden en niet met de buitenwereld.

1)

De totale impuls van het systeem is gelijk aan de vectoriële optelsom van de impulsen van de bestanddelen. Bij een veranderingsproces (reactie) blijft de totale impuls gelijk.

2)

De totale energie van het systeem is gelijk aan de optelsom van de energieën van de bestanddelen. Bij een veranderingsproces (reactie) blijft de totale energie gelijk.

3)

De massa van het systeem is in het algemeen NIET gelijk aan de optelsom van de massa's van de bestanddelen (althans relativistisch gezien).

In de vorige paragrafen maakten we gebruik van de eerste twee regels. Bij regel 3 kan de massa van het systeem zowel groter als kleiner zijn dan de optelsom van de massa's van de bestanddelen.

Massa van een systeem van deeltjes (valt buiten de lesstof)

Als p_{SYS} de totale impuls en E_{SYS} de totale energie van een geïsoleerd systeem van deeltjes is, geldt voor de totale massa M_{SYS} van het systeem:

$$E_{\text{SYS}}^2 - (p_{\text{SYS}}c)^2 = (M_{\text{SYS}}c^2)^2.$$

Deze formules kenden we al voor een afzonderlijk deeltje maar hij geldt ook voor een (geïsoleerd) systeem van deeltjes. Omdat de waarden van E_{SYS} en p_{SYS} behouden blijven bij een veranderingsproces binnen het systeem, zal de waarde van M_{SYS} ook gelijk blijven. De voorwaarde hierbij is wel dat het gehele systeem (inclusief fotonen) moet worden meegenomen in de beschouwing. Een mooi voorbeeld in dit verband is de annihilatie van een elektron en een positron. Deze twee deeltjes verdwijnen en er komen twee gammafotonen, die in tegengestelde richting bewegen, voor in de plaats. Terwijl de afzonderlijke fotonen massaloos zijn, heeft het systeem van deze twee fotonen volgens de laatste formule wel massa! Bedenk daarbij dat de totale impuls van het systeem nul is.

Verder moet worden opgemerkt dat de waarden van E_{SYS} en p_{SYS} verschillen van (inertiaal)waarnemer tot waarnemer die ten opzichte van elkaar bewegen. Hoe kleiner p_{SYS} is, des te kleiner ook E_{SYS} is. Voor de waarnemer waarbij p_{SYS} nul is, is E_{SYS} minimaal. Echter, de waarde van M_{SYS} is invariant, dat wil zeggen voor iedere waarnemer gelijk. Iets soortgelijks hadden we ook al gezien bij een afzonderlijk deeltje.

Opmerking

Bij het bepalen van het massadefect kijken we niet naar de massa van het systeem van de deeltjes (die is immers constant) maar naar de som van de massa's van de afzonderlijke deeltjes.

Opgaven bij § 10

Opgave 1

Wat verstaan we onder 1 elektronvolt?

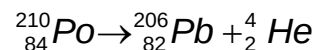
Wat verstaan we onder 1 atomaire massa-eenheid?

Opgave 2

De massa van een atoom kun je niet zonder meer berekenen door de massa van de atoomkern te vermeerderen met de massa van de bijbehorende elektronen. Leg dit uit.

Opgave 3

De onderstaande reactie geeft het alfaverval van polonium-210 weer.



Hierbij geldt: $m(\text{Po-210-kern}) = 209,93678 \text{ u}$ en $m(\text{Pb-206-kern}) = 205,92946 \text{ u}$ en $m(\text{He-4-kern}) = 4,001506 \text{ u}$.

a.

Bepaal het massadefect van deze reactie.

b.

Leg kort uit dat er energie vrijkomt bij deze reactie.

c.

Bereken hoeveel energie (in MeV) er vrijkomt.

Het alfadeeltje krijgt bij het verval een kinetische energie van 5,3 MeV.

d.

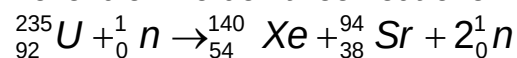
Leg uit waarom er een verschil zit tussen de bij c. gevonden waarde en de genoemde 5,3 MeV.

Opgave 4

Net als een dozijn (12) en een gros (144) is een 'mol' een aanduiding voor een aantal. Een mol is het aantal koolstof-12 atomen dat een gezamenlijke massa van 12 gram heeft. Dit aantal is $6,022 \cdot 10^{23}$. Leg uit wat het verband is tussen een mol en de atomaire massa-eenheid.

Opgave 5

In de volgende kernreactie absorbeert een uranium-235 kern een neutron. Vervolgens valt de kern uiteen in een xenon-140 kern en een strontium-94 kern. Bovendien worden twee neutronen weggeschoten.



Hierbij geldt: $m(\text{neutron}) = 1,0086649 \text{ u}$ en $m(\text{U-235-kern}) = 234,9935 \text{ u}$ en $m(\text{Xe-140-kern}) = 139,8918 \text{ u}$ en $m(\text{Sr-94-kern}) = 93,8944 \text{ u}$.

a.

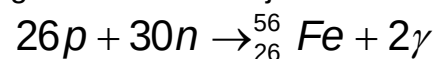
Bepaal het massadefect.

b.

Bereken de energie (in MeV) die vrijkomt.

Opgave 6

In de volgende denkbeeldige kernreactie komen 26 losse protonen en 30 losse neutronen samen en vormen een ijzer-56 kern. Er komen hierbij twee gelijke gammafotonen vrij.



Hierbij geldt: $m(\text{proton}) = 1,0072765 \text{ u}$ en $m(\text{neutron}) = 1,0086649 \text{ u}$ en $m(\text{Fe-56-kern}) = 55,920677 \text{ u}$.

a.

Bepaal het massadefect.

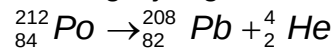
b.

Bereken de energie van elk afzonderlijk gammafoton. Neem daarbij aan dat de losse protonen, neutronen en ijzerkern een verwaarloosbare kinetische energie hebben.

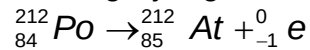
Opgave 7

Polonium-212 is een alfastraler en bijvoorbeeld geen bètastraler. We kunnen dit nagaan door naar de massaverandering bij beide vervalvergelijkingen te kijken.

De vergelijking van het alfaverval is:



De vergelijking van het bètaverval (preciezer: bèta min verval) is:



De massa's van de deeltjes zijn hieronder gegeven.

$m(\text{Po-212-kern}) = 211,94279 \text{ u}$ en $m(\text{Pb-208-kern}) = 207,93165 \text{ u}$ en

$m(\text{He-4-kern}) = 4,001506 \text{ u}$ en $m(\text{At-212-kern}) = 211,94412 \text{ u}$ en

$m(\text{elektron}) = 0,00054858 \text{ u}$.

a.

Bepaal het massadefect die bij het alfaverval hoort.

b.

Bepaal het massadefect die bij het betaverval hoort.

c.

Leg uit dat alfaverval wel mogelijk is en bètaverval niet.

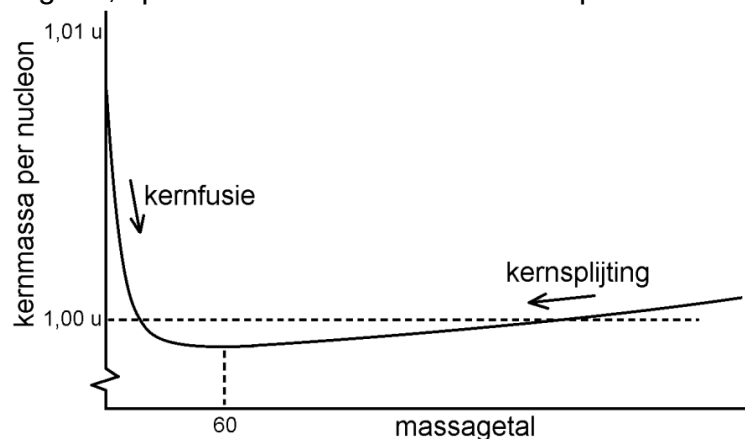
§ 11 Bindingsenergie van atoomkernen

Kernmassa

Ter herinnering volgt hier eerst wat basisinformatie. Atoomkernen zijn opgebouwd uit protonen en neutronen. Protonen en neutronen worden nucleonen (kerndeeltjes) genoemd. Onder het massagetal van een atoomkern verstaan we het aantal nucleonen waaruit deze kern is opgebouwd. Protonen en neutronen hebben bijna dezelfde massa die zeer dicht bij 1 u (atomaire massa-eenheid) ligt.

Het massagetal is bij benadering een goede maat voor de kernmassa. Als we de kernmassa delen door het massagetal, spreken we over de kernmassa per nucleon.

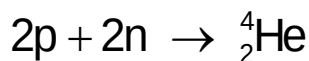
Van alle atoomkernen ligt de kernmassa per nucleon zeer dicht bij 1 u. Toch zien we kleine verschillen. De kernmassa per nucleon is het laagst bij massagetalen rond 60. Zie het diagram hiernaast waarin het globale verloop van de kernmassa per nucleon is uitgezet tegen het massagetal.



In het diagram zijn kernfusie en kernsplijting aangegeven. Bij kernfusie worden kleine atoomkernen gecombineerd tot grotere kernen. Zoals uit het diagram blijkt, verdwijnt er dan wat massa en wordt rustenergie omgezet in een andere energievorm. Bij kernsplijting worden zware atoomkernen gesplitst in kleinere kernen. Ook nu verdwijnt er wat massa en komt er, net als bij kernfusie, energie vrij. We zien aan de steilheid van de grafiek dat de energieopbrengst per nucleon bij kernfusie veel groter is dan bij kernsplijting.

Bindingsenergie

Een atoomkern zou je theoretisch kunnen 'maken' door losse protonen en losse neutronen bij elkaar te brengen. Bijvoorbeeld kan de vorming van een helium-4 kern uit twee losse protonen en twee losse neutronen door de volgende vergelijking beschreven worden.



Bij het ontstaan van een atoomkern uit losse protonen en neutronen komt er energie vrij: de zogenoemde bindingsenergie. Omgekeerd kost het energie om een atoomkern te ontleden in losse protonen en neutronen. Bijvoorbeeld komt er 28,3 MeV vrij bij het ontstaan van een helium-4 kern en kost het ook 28,3 MeV om een heliumkern te ontleden.

Samenvattend geldt dus:

De bindingsenergie van een atoomkern is de energie die vrij komt als deze atoomkern uit losse nucleonen wordt opgebouwd en omgekeerd de energie die nodig is om de atoomkern te scheiden in losse nucleonen.

Als losse protonen en neutronen bij elkaar komen en er een atoomkern ontstaat, neemt de massa af. Uit het massadefect volgt de bindingsenergie van die atoomkern. Laten we de bovenstaande reactie nemen. Het massadefect Δm kan als volgt berekend worden.

$$\Delta m = 2 \cdot m(\text{proton}) + 2 \cdot m(\text{neutron}) - m(\text{helium-4 kern}) = 0,03038 \text{ u.}$$

Er komt dan $0,03038 \text{ u} \cdot 931,49 \text{ MeV/u} = 28,3 \text{ MeV}$ aan energie vrij.

Bindingsenergie per nucleon

Elke atoomkern heeft zijn eigen bindingsenergie. Zie de volgende voorbeelden.

Helium-4 kern: 28,3 MeV (zie hierboven);

Zuurstof-16 kern: 128 MeV;

IJzer-56 kern: 492 MeV;

Uranium-238 kern: 1802 MeV.

Als je naar deze waarden kijkt, zou je kunnen denken dat van de vier genoemde kernen de uranium-238 kern het meest stabiel is. Bij zijn ontstaan uit losse nucleonen (dit zijn protonen en neutronen) komt er immers de meeste energie vrij. Toch is dit niet het geval want er zijn ook heel veel nucleonen bij betrokken. Met hetzelfde aantal losse nucleonen zou je bijvoorbeeld meerdere (veel kleinere) ijzer-56 kernen kunnen maken. Het is daarom eerlijker om de bindingsenergie te delen door het massagetal. Aldus krijgen we:

Helium-4 kern: $28,3 / 4 = 7,1 \text{ MeV}$ (zie hierboven);

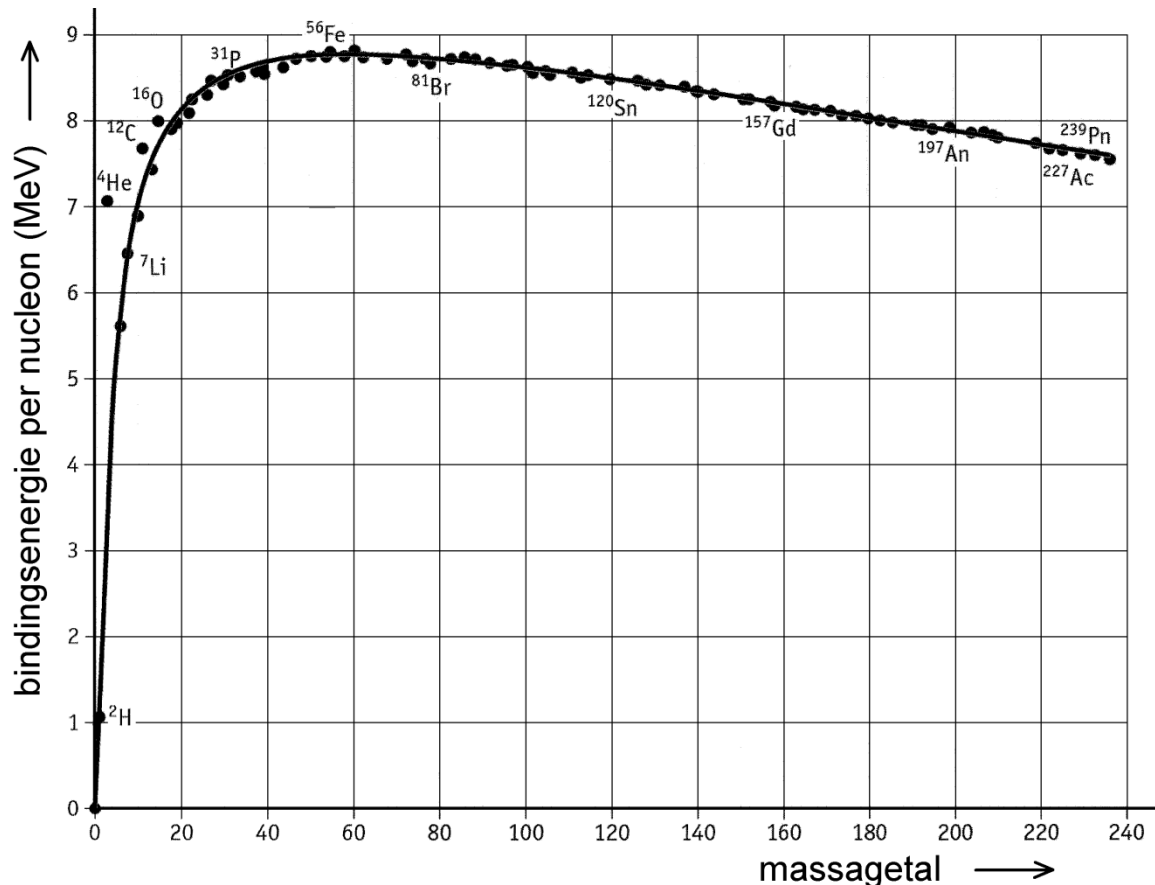
Zuurstof-16 kern: $128 / 16 = 8,0 \text{ MeV}$;

IJzer-56 kern: $492 / 56 = 8,8 \text{ MeV}$;

Uranium-238 kern: $1802 / 238 = 7,6 \text{ MeV}$.

Binnen het rijtje heeft ijzer-56 de hoogste bindingsenergie per nucleon. Deze atoomkern is daarmee het stabielst. In het volgende diagram is de bindingsenergie per nucleon uitgezet tegen het massagetal. Ga na dat ijzer-56 en nikkel-60 op de top van de grafiek liggen.

Merk op dat dit diagram het omgekeerde gedrag vertoont van het eerdere diagram. Naarmate de massa per nucleon afneemt, wordt de bindingsenergie per nucleon groter en omgekeerd.



Voorbeeld van het gebruik van het diagram

Opgave

Stel dat men 2,0 kg zuurstof-16 om zou kunnen zetten in tin-120. Hoeveel energie zou daarbij dan vrijkomen?

Oplossing

In het diagram lezen we af dat de bindingsenergie per nucleon van zuurstof-16 gelijk is aan 8 MeV en van tin-120 gelijk is aan 8,5 MeV. De toename is dus 0,5 MeV.

Het aantal nucleonen n dat bij de omzetting meedoet volgt uit:

$$n = \frac{2,0 \text{ kg}}{1 \text{ u}} = \frac{2,0 \text{ kg}}{1 \text{ u} \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg/u}} = 1,2 \cdot 10^{27}$$

Er komt dus een energie E vrij van:

$$E = 1,2 \cdot 10^{27} \cdot 0,5 \text{ MeV} = 0,6 \cdot 10^{27} \text{ MeV}$$

Omrekenen naar joule:

$$E = 0,6 \cdot 10^{27} \text{ MeV} \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J/MeV} = 1 \cdot 10^{14} \text{ J}$$

Opgaven bij § 11

Opgave 1

Druk in deze opgave de massa uit in u (= atomaire massa-eenheid) en werk met minstens 5 decimalen.

De kernmassa van helium-4 bedraagt 4,001505 u.

a.

Bereken de kernmassa per nucleon van helium-4.

De kernmassa van nikkel-60 bedraagt 59,91542 u.

b.

Bereken de kernmassa per nucleon van nikkel-60.

De kernmassa van uranium-238 bedraagt 238,00027 u.

c.

Bereken de kernmassa per nucleon van uranium-238.

d.

Vergelijk de uitkomsten van a, b en c met elkaar. Leg uit dat dit in overeenstemming is met de leestekst.

e.

De massa van een los proton bedraagt 1,007276 u.

De massa van een los neutron bedraagt 1,008665 u.

Vergelijk deze waarden met de bovengevonden waarden. Wat valt je op?

Opgave 2

a.

Schrijf de reactievergelijking op waarbij een uranium-235 kern uit losse protonen en neutronen voortkomt. Uranium heeft atoomnummer 92.

De massa van een uranium-235 kern bedraagt 234,9935 u.

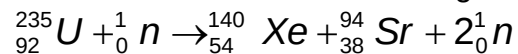
De massa van een los proton bedraagt 1,007276 u.

De massa van een los neutron bedraagt 1,008665 u.

b.

Toon aan dat de bindingsenergie per nucleon van uranium-235 gelijk is aan 7,6 MeV.

In een kerncentrale vindt de volgende reactie plaats.



c.

Lees uit het diagram in de leestekst (de bindingsenergie per nucleon uitgezet tegen het massagetal) af hoe groot de bindingsenergie per nucleon is van de xenon-140 kern en van de strontium-94 kern.

d.

Bereken met deze gegevens hoeveel energie (in MeV) bij deze reactie vrijkomt.

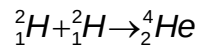
Opgave 3

In een bepaalde fase van het bestaan van een ster kan de kern van de ster vrijwel geheel uit helium bestaan. In relatief korte tijd kan al dat helium worden omgezet in koolstof. Dit gebeurt alleen bij relatief zware sterren. Stel dat de kern van een zware ster een massa van $4,00 \cdot 10^{30}$ kg heeft (dit is twee keer de massa van onze zon) en dat deze kern geheel uit helium-4 bestaat. Bepaal dan hoeveel joule energie er vrijkomt bij de omzetting van deze gehele heliumvoorraad in koolstof-12. Doe dat op de volgende manier.

- Stap 1: Lees uit het diagram in de leestekst de toename aan bindingsenergie per nucleon af bij deze omzetting.
- Stap 2: Bereken het totaal aantal nucleonen dat in de kern van deze ster zit. Rond daarbij de massa van een nucleon af tot 1 u.
- Stap 3: Combineer stap 1 en 2.

Opgave 4

Stel je de volgende niet reële situatie voor. Iemand laat in een eigen kernfusiereactor 20 kilogram deuterium (waterstof-2) fuseren tot helium-4 volgens de volgende reactie.



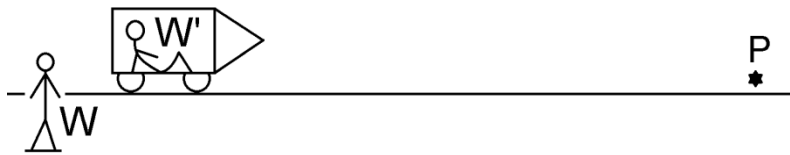
Bereken dan hoeveel joule daarbij vrijkomt. Maak daarbij gebruik van het diagram in de leestekst.

Afleiding van formules met relativistische impuls en energie

In de volgende theorie maken we onderscheid tussen twee snelheden. Het ene inertiaalstelsel beweegt met snelheid u ten opzichte van het andere inertiaalstelsel. Een deeltje beweegt met snelheid v voor een waarnemer in een inertiaalstelsel.

Lorentztransformatie

In de onderstaande figuur beweegt waarnemer W' ten opzichte van waarnemer W met snelheid u naar rechts. Op het moment dat de oorsprongen van W en W' samenvallen, zetten beiden hun klokken op nul. We beschouwen een willekeurige gebeurtenis P . In de figuur is deze met een ster aangegeven.



Allereerst definiëren we de symbolen β en γ als volgt (met c = lichtsnelheid):

$$\beta = \frac{u}{c} \quad \text{en} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Voor waarnemer W zijn de coördinaten van de gebeurtenis t (= tijd) en x (= plaats). Voor W' kunnen de coördinaten t' en x' van dezelfde gebeurtenis met de lorentztransformatie uit t en x berekend worden. Zie de onderstaande twee vergelijkingen.

$$ct' = \gamma(ct - \beta \cdot x)$$

$$x' = \gamma(x - \beta \cdot ct)$$

Viervector

We zijn in de natuurkunde gewend aan 3-dimensionale vectoren. Denk bijvoorbeeld aan kracht- en snelheidsvectoren. Zo bevat een krachtvector drie componenten, namelijk F_x , F_y en F_z . Hierna wordt gebruik gemaakt van viervectoren. Een viervector bevat vier componenten. Zo bevat viervector A (altijd als hoofdletter schrijven!) de componenten a_0 , a_1 , a_2 en a_3 . Dit kan kort opgeschreven worden als:

$$A = (a_0, a_1, a_2, a_3).$$

Het inwendig product $A \cdot B$ van twee viervectoren A en B is per definitie:

$$A \cdot B = a_0 \cdot b_0 - a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2 - a_3 \cdot b_3.$$

Voor een viervector geldt dat zijn componenten voor de ene waarnemer (W) kunnen worden omgerekend naar de componenten voor de andere waarnemer (W') door middel van de lorentztransformatie. Als we ons verder beperken tot een viervector A waarvan alleen de eerste twee componenten getransformeerd worden en de laatste twee componenten steeds nul zijn (dus $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_2' = 0$ en $a_3' = 0$), geldt:

$$a_0' = \gamma(a_0 - \beta \cdot a_1)$$

$$a_1' = \gamma(a_1 - \beta \cdot a_0)$$

Twee belangrijke eigenschappen van viervectoren zijn de volgende:

Eigenschap 1

Het inwendig product van een viervector met zichzelf geeft voor iedere waarnemer dezelfde uitkomst. Anders gezegd: het inwendig product is invariant.

In het geval van $A = (a_0, a_1, 0, 0)$ en $A' = (a_0', a_1', 0, 0)$ geldt dus: $a_0^2 - a_1^2 = a_0'^2 - a_1'^2$

Eigenschap 2

Als je de componenten van een viervector vermenigvuldigt met een constante factor k die voor alle waarnemers gelijk is, ontstaat er een nieuwe viervector.

Positie-viervector

In het algemeen wordt een gebeurtenis gekenmerkt door de drie ruimtelijke coördinaten x , y en z en één tijdcoördinaat t . We definiëren nu de positie-viervector X als:

$$X = (ct, x, y, z).$$

Door deze keuze van de componenten is X automatisch een (relativistische) viervector.

Het inwendig product van X met zichzelf wordt:

$$X \cdot X = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Omdat wij ons beperken tot gebeurtenissen langs de x -as (dus $y = z = 0$) wordt dit:

$$X \cdot X = (ct)^2 - x^2.$$

In het rechterlid herkennen we het kwadraat van het ruimtetijdinterval dat wordt aangegeven met s^2 . Omdat het ruimtetijdinterval invariant is (dus niet verschilt van waarnemer tot waarnemer), geldt:

$$X \cdot X = X' \cdot X'$$

Aan de eerder genoemde eerste eigenschap van viervectoren is dus voldaan.

Verplaatsings-viervector

Naast de coördinaten van een gebeurtenis laten zich ook coördinaatverschillen met de lorentztransformatie omrekenen van de ene naar de andere waarnemer. Stel dat er twee (willekeurige) gebeurtenissen plaatsvinden. Als Δt de tijd tussen beide gebeurtenissen is en Δx het verschil tussen de x -coördinaten van de gebeurtenissen (en analoog voor Δy en Δz), kunnen we de verplaatsing-viervector als volgt definiëren.

$$\Delta X = (c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z).$$

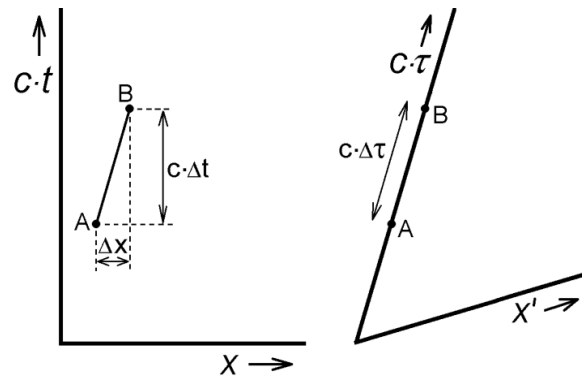
Voor het inwendig product van ΔX met zichzelf geldt:

$$\Delta X \cdot \Delta X = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2.$$

Het rechterlid is weer het kwadraat van het ruimtetijdinterval (symbool s^2) tussen beide gebeurtenissen. Dit interval is invariant wat in overeenstemming is met de eerste eigenschap.

Viersnelheid

Laten we nu een deeltje volgen dat zich verplaatst van plaats A naar plaats B. Hiernaast is voor twee referentiestelsels de wereldlijn van het deeltje in het minkowskidiagram getekend. In het linker diagram heeft het deeltje een snelheid v voor de waarnemer. In het rechter diagram is het deeltje voor de waarnemer in rust. De tijd voor deze waarnemer is met τ aangeduid.



Omdat het ruimte-tijdinterval invariant is, geldt:

$$(c\Delta t)^2 - \Delta x^2 = (c\Delta \tau)^2$$

Hierin is $\Delta \tau$ de tijd die verstreken is volgens de met het deeltje meebewegende waarnemer: de zogenoemde 'eigentijd'.

Omdat $\Delta x = v \cdot \Delta t$ volgt hieruit:

$$(c^2 - v^2) \cdot \Delta t^2 = c^2 \cdot \Delta \tau^2.$$

Hieruit volgt:

$$\Delta \tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

We zien hieruit dat de verstreken tijd Δt altijd groter is dan de eigentijd $\Delta \tau$.

In het algemeen geldt dat de snelheid van een deeltje berekend kan worden door zijn verplaatsing Δx te delen door de tijdsduur Δt . Als we iedere component van de verplaatsings-veervector delen door Δt , krijgen we een veervector voor de snelheid: de zogenoemde viersnelheid. We moeten hierbij echter goed nadenken over de tijdsduur waarmee je deelt. Deze tijdsduur moet invariant zijn. We willen namelijk dat de viersnelheid een veervector is. Een voor de hand liggende keus is daarom om te delen door de eigentijd $\Delta \tau$. De viersnelheid V wordt dan dus:

$$V = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta \tau}, \frac{\Delta x}{\Delta \tau}, \frac{\Delta y}{\Delta \tau}, \frac{\Delta z}{\Delta \tau} \right).$$

Merk op dat V een veervector is dankzij de eerder genoemde tweede eigenschap van veervectoren. Alle componenten delen door $\Delta \tau$ komt immers overeen met het vermenigvuldigen met een factor k .

Als we stellen dat $\Delta y = \Delta z = 0$, geldt voor de viersnelheid:

$$V = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, 0, 0 \right).$$

In deze vergelijking is v de snelheid van het deeltje in de x -richting.

De viersnelheid van het deeltje voor de meebewegende waarnemer is:

$$V' = (c, 0, 0, 0).$$

Ga na dat het inwendig product van V met zichzelf voor elke waarnemer c^2 bedraagt en deze is natuurlijk ook weer invariant (zie de eerste eigenschap).

Vierimpuls

We vermenigvuldigen nu elke component van de viersnelheid met de (invariante!) massa m van het deeltje. We krijgen dan de viervector voor de impuls: de zogenoemde vierimpuls P . Uitgaande van de vergelijking voor V krijgen we dan:

$$P = \left(\frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, 0, 0 \right).$$

Als we naar de tweede component van P kijken, herkennen we in de teller de klassieke impuls mv . De relativistische impuls is dan:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

De relativistische impuls is dus altijd groter dan de klassieke impuls. Als v veel kleiner dan c is, is de noemer praktisch 1 en gaat de relativistische impuls over in de klassieke impuls.

Als we naar de eerste component van P kijken, kunnen we daar in eerste instantie weinig betekenis aan toekennen. Als we deze eerste component echter met c vermenigvuldigen en hem vervolgens als reeksontwikkeling schrijven, krijgen we:

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \frac{15}{48}m\frac{v^6}{c^4} + \dots$$

De tweede term van het rechterlid is de kinetische energie $\frac{1}{2}mv^2$ van het deeltje.

Voor alle termen geldt dat ze de eenheid van energie hebben. Ze stellen dus een bepaalde energiebijdrage voor. We nemen daarom aan dat alle termen bij elkaar de totale energie E voorstellen. De eerste component van de vierimpuls is dan dus E/c . Voor de totale energie van het deeltje geldt dus:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Verband tussen de energie en de impuls van een deeltje

De vierimpuls kan geschreven worden als:

$$P = \left(\frac{E}{c}, p, 0, 0 \right)$$

Omdat P een viervector is, is het inwendig product van P met zichzelf invariant. Er geldt dus:

$$\left(\frac{E}{c} \right)^2 - p^2 = \left(\frac{E'}{c} \right)^2 - p'^2.$$

In het rechterlid zijn de energie en impuls voorzien van accentjes om aan te geven dat deze grootheden betrekking hebben op waarnemer W' . Als we voor W' de met het deeltje meebewegende waarnemer kiezen, geldt $p'=0$ en $E'=mc^2$. De laatste vergelijking kunnen we dan schrijven als:

$$E'^2 - p'^2 c^2 = m^2 c^4.$$

Transformatie van energie en impuls tussen twee waarnemers

Stel dat twee waarnemers W en W' met een constante snelheid ten opzichte van elkaar bewegen en dat beiden een deeltje observeren. Zoals steeds beperken we ons hierbij in de ruimte tot eendimensionale situaties (geen beweging in de y - of z -richting). Voor W heeft het deeltje een energie E en een impuls p . Voor W' heeft het deeltje een energie E' en een impuls p' . Omdat de vierimpuls een viervector is, kunnen E' en p' met behulp van de lorentztransformatie uit E en p worden gevonden.

We moeten duidelijk onderscheid maken tussen twee snelheden: de snelheid van de waarnemers ten opzichte van elkaar en de snelheid van het deeltje ten opzichte van een waarnemer. Voor de transformatie van E en p naar E' en p' is de eerste snelheid van belang. Als u de snelheid van W' ten opzichte van W is, stellen we:

$$\beta = \frac{u}{c} \quad \text{en} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Door gebruikmaking van deze twee factoren, wordt de transformatie van E en p :

$$\frac{E'}{c} = \gamma \left(\frac{E}{c} - \beta \cdot p \right) \quad \text{en} \quad p' = \gamma \left(p - \beta \cdot \frac{E}{c} \right).$$

Merk op dat deze transformatie sterk lijkt op de transformatie voor ruimte en tijd. Impuls en energie zijn aan elkaar verwant als ruimte en tijd.